Le Mans Université

Licence 2

Année Universitaire 2021-2022

Mardi 2 novembre 2020

Examen 1 - Algèbre linéaire 3 - Première Session

— *Le problème et les exercices sont indépendants.*
— *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
— *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
— *Tout document de cours est interdit.*

Rappel de cours : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ la matrice notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ définie par

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(Id_E).$$

1 Questions de cours

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
   (a) Montrer que $Im(f) = vect(\{f(e_1), \dots, f(e_n)\})$.
   (b) Que peut-on dire sur la dimension de $Im(f)$? Justifier votre réponse.
2. Donner une base et la dimension de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, l'espace des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
   (a) Soit $u \in E$. Quel est le lien entre le vecteur colonne X des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et le vecteur colonne X' des coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$? Donner un exemple.
   (b) Montrer que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{R})$ et, en le prouvant, donner son inverse.
4. Soit également F un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Quelle est la relation entre $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$? Démontrer.

2 Exercice

Exercice 1

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ définit par

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = z = t\}.$$

1. Déterminer la dimension de H.
2. Existe-t-il des applications linéaires de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est H ?

Exercice 2

1. Donner la définition de la trace d'une matrice.
2. Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.

3 Problème

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\phi(e_1) = (0, 0, 1), \quad \phi(e_2) = (-1, 1, 1), \quad \phi(e_3) = (0, 0, 1).$$

1. Déterminer $Im(\phi)$. L'application est-elle surjective ? Donner la dimension du noyaux de l'application.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $\phi((x, y, z))$.
3. Donner la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$ de l'application linéaire dans la base $\mathcal{B}$.
4. Soit $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$ et $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
   (a) Soit ψ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
   $$\psi(e_1) = f_1, \quad \psi(e_2) = f_2, \quad \psi(e_3) = f_3.$$
   Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\psi)$.
   (b) En déduire que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
   (d) En déduire $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.
5. Revenons à l'application ϕ.
   (a) En utilisant la formule vue en cours, en déduire $B = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\phi)$.
   (b) En utilisant B, retrouver $Im(\phi)$ et déterminer $Ker(\phi)$.
6. On considère maintenant deux applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, telles que
   $$f \circ g = \phi.$$
   On note $\mathcal{G}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Donner un lien entre B et les matrices d'applications linéaire de f et g en *précisant bien les bases.* *Indication* : Vous aurez besoin des bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{G}$.
   (b) Que vaut $f \circ g(f_2)$ et $f \circ g(f_3)$?
   (c) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\lambda g(f_2) + \mu g(f_3) = (0, 0).$$
   Montrer que $\lambda = \mu = 0$. Que peut-on en déduire sur la famille $\mathcal{G}' = (g(f_2), g(f_3))$?
   (d) Déterminer l'image de $(g(f_2), g(f_3))$ par $g \circ f$.
   (e) En déduire $\mathcal{M}_{\mathcal{G},\mathcal{G}}(g \circ f)$.