L2 - Algèbre linéaire - CC1 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

1 Questions de cours

1. (a) On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors la trace de la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est le réel

$$\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}.$$

   (b) Nous avons

$$X' = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\operatorname{id}_E)X = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}X.$$

En effet nous avons

$$X' = M_{\mathcal{B}'}(u) = M_{\mathcal{B}'}(\operatorname{id}_E(u)) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\operatorname{id}_E)M_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}X,$$

ou si nous voulons le détailler, nous notons x_i (respectivement x'_i) les coordonnées du vecteur u selon la base $\mathcal{B}$ (respectivement selon la base $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$), et également λ_{ij} les coordonnées du vecteur e_i selon la base $\mathcal{B}'$. Nous avons alors

$$\sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e'_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_i \right) e'_j.$$

Donc, comme $\mathcal{B}'$ est une base, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_i.$$

Ainsi

$$X' = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\operatorname{id}_E)X = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}X.$$

   (c) Nous avons

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E)M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(g)M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\operatorname{id}_E) = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^{-1}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(g)P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

En effet nous avons

$$g = \operatorname{id}_E \circ g \circ \operatorname{id}_E,$$

et

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E) = \left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\operatorname{id}_E^{-1})\right)^{-1} = \left(M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\operatorname{id}_E)\right)^{-1} = P_{B'B}^{-1}.$$

2. On raisonne par contraposée : on suppose que la famille de vecteurs $(C_1, ..., C_n)$ n'est pas une base de $M_{n1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$. Alors cette famille n'est ni libre ni générateur car formée de $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$. En particulier cette famille est liée : il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Comme les λ_i sont non tous nuls, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On effectue alors les opérations $C_{i_0} \longleftarrow \lambda_{i_0} C_{i_0}$ puis $C_{i_0} \longleftarrow C_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i C_i$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \frac{1}{\lambda_{i_0}} \det(C_1, ..., C_{i_0-1}, \lambda_{i_0} C_{i_0}, C_{i_0+1}, ..., C_n) \\
&= \frac{1}{\lambda_{i_0}} \det\left(C_1, ..., C_{i_0-1}, \lambda_{i_0} C_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i C_i, C_{i_0+1}, ..., C_n\right) \\
&= \frac{1}{\lambda_{i_0}} \det\left(C_1, ..., C_{i_0-1}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i, C_{i_0+1}, ..., C_n\right) \\
&= \frac{1}{\lambda_{i_0}} \det\left(C_1, ..., C_{i_0-1}, 0_{\mathbb{R}^n}, C_{i_0+1}, ..., C_n\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par contraposée nous avons donc que si $\det(A) \neq 0$ alors la famille $(C_1, ..., C_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

3. On considère $i_0 \in [\![1,n]\!]$ et $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i C_i$ une combinaison linéaire des autres colonnes que C_{i_0}. Alors nous avons l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} C_1 & ... & C_{i_0-1} & C_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i C_i & C_{i_0+1} & ... & C_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & (0) & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & (0) & \\ & & 1 & \lambda_{i_0-1} & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \lambda_{i_0+1} & 1 & & \\ & (0) & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \lambda_n & (0) & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 & ... & C_{i_0-1} & C_{i_0} & C_{i_0+1} & ... & C_n \end{pmatrix}.$$

Donc, par propriété du déterminant,

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} C_1 & ... & C_{i_0-1} & C_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i C_i & C_{i_0+1} & ... & C_n \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & & (0) & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & (0) & \\ & & 1 & \lambda_{i_0-1} & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \lambda_{i_0+1} & 1 & & \\ & (0) & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \lambda_n & (0) & & 1 \end{pmatrix} \times \det(A),
\end{aligned}$$

avec, par développement selon la première i_0-ième ligne,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & & (0) & \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & (0) & \\ & & 1 & \lambda_{i_0-1} & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \lambda_{i_0+1} & 1 & & \\ & (0) & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \lambda_n & (0) & & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Donc

$$\det \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_{i_0-1} & C_{i_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} \lambda_i C_i & C_{i_0+1} & \dots & C_n \end{pmatrix} = \det(A).$$

2 Exercice

1. Nous avons premièrement
$$P \cap D = \{0_{\mathbb{R}^3}\},$$
car pour tout $u = (x, y, z) \in P \cap D$, nous avons $x = z, y = 0$ et $0 = 2x - 0 + z = 3x$, d'où $z = x = 0$ et $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. Deuxièmement nous avons
$$\dim(P) + \dim(D) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$
car nous avons
$$P = \mathrm{Vect}((1, 2, 0), (1, 0, -2)).$$
En effet nous avons $(1, 2, 0), (1, 0, -2) \in P$ donc $\mathrm{Vect}((1, 2, 0), (1, 0, -2)) \subset P \subset \mathbb{R}^3$. Ainsi, comme les deux vecteurs sont libres, $2 \leq \dim(P) \leq 3$, et comme $P \neq \mathbb{R}^3$, nous avons finalement
$$\dim(P) = 2.$$
Et car nous avons
$$D = \mathrm{Vect}((1, 0, 1)).$$
En effet nous avons $(1, 0, 1) \in D$ donc $\mathrm{Vect}((1, 0, 1)) \subset D$ et réciproquement
$$\forall u = (x, y, z) \in D, \quad u = (x, 0, x) = x(1, 0, 1) \in \mathrm{Vect}((1, 0, 1)),$$
d'où $D \subset \mathrm{Vect}((1, 0, 1))$. Nous avons finalement
$$\dim(D) = 1.$$
Par conséquent les sous-espaces P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche la décomposition de u dans la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) = ((1, 2, 0), (1, 0, -2), (1, 0, 1))$: soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3.$$
Alors
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$
D'après la méthode du pivot de Gauss, nous avons alors
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
Donc
$$p(u) = p(x, y, z) = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \frac{1}{2} y b_1 + \frac{1}{6}(2x - y - 2z) b_2 = \frac{1}{3}\left(x + y - z, 3y, -2x + y + 2z\right).$$
3. Avec la base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, nous avons
$$p(e_1) = p(1, 0, 0) = \frac{1}{3}(1, 0, -2),$$
$$p(e_2) = p(0, 1, 0) = \frac{1}{3}(1, 3, 1),$$
$$p(e_3) = p(0, 0, 1) = \frac{1}{3}(-1, 0, 2).$$
Donc
$$M_e(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 Problème

3.1 Partie I

1. Nous avons
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On effectue l'opération $L_1 \longleftrightarrow L_3$
$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -4 \\ 6 & -4 & -4 \end{vmatrix},$$
puis les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - 5L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - 6L_1$
$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$
Donc, comme il y a deux lignes identiques, $\det(A) = 0$. On pouvait aussi directement remarquer que la première ligne de la matrice A est la somme de ses deux dernières lignes.

3. Les colonnes de la matrice A ne forment donc pas une base de $\mathbb{R}^3$ d'après la question de cours 2. Ainsi
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \neq \mathbb{R}^3.$$
Donc l'endomorphisme f n'est pas surjectif sur $\mathbb{R}^3$ donc n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

4. Nous avons également, en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de la matrice A,
$$C_1 + C_2 = -\frac{1}{2}C_3,$$
et C_1, C_2 non colinéaires. Donc
$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2)),$$
et
$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2.$$
Puis, par théorème du rang, nous avons directement
$$\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(f) = 1.$$

5. Nous avons
$$f(u_1) = (12 - 8 - 4, 10 - 6 - 4, 2 - 2) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
Donc $u_1 \in \ker(f)$ puis $\mathrm{Vect}(u_1) \subset \ker(f)$ puis, par égalité des dimensions,
$$\ker(f) = \mathrm{Vect}(u_1).$$

3.2 Partie II

1. (a) Nous avons par linéarité
$$f(u_2) = f(e_1) + f(e_2) = (2, 2, 0) = 2u_2,$$
et
$$f(u_3) = f(e_2) - f(e_3) = (0, 1, -1) = u_3.$$
   (b) Nous avons, d'après la question précédente,
$$u_2 = \frac{1}{2}f(u_2) = f\left(\frac{1}{2}u_2\right) \in \mathrm{Im}(f),$$
et
$$u_3 = f(u_3) \in \mathrm{Im}(f).$$
Ainsi les vecteurs u_2 et u_3 forment une famille libre de $2 = \dim(\mathrm{Im}(f))$ vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ d'après la question 4 de la partie I. Donc (u_2, u_3) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Nous avons, en développant selon la deuxième colonne,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(2\times(-1)-1)+(2\times(-1)-0) = 3-2 = 1 \neq 0.$$

Donc les vecteurs u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Nous avons directement d'après les questions précédentes

$$f(u_1) = 0, \quad f(u_2) = 2u_2, \quad f(u_3) = u_3.$$

Donc

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Nous avons, d'après la formule de changement de base

$$D = M_{\mathcal{CC}}(f) = M_{\mathcal{BC}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})M_{\mathcal{BB}}(f)M_{\mathcal{CB}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = P^{-1}AP, \quad \text{avec} \quad P = M_{\mathcal{CB}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

5. Le principe de récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ permet de montrer la propriété

$$\mathcal{P}(n) : A^n = PD^nP^{-1}.$$

En effet pour $n = 1$ il s'agit de la question précédente. Puis si l'on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\mathcal{P}(n+1)$ est également vraie car

$$A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

6. Nous avons par méthode du pivot de Gauss

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Nous avons donc par calcul matriciel

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 2^n & -2^{n+1} & -2^{n+1} \\ 3\times 2^n - 1 & -2^{n+1}+1 & -2^{n+1} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$