Le Mans Université

Département de Mathématiques
W. Sabbagh

Année Universitaire 2023-2024
Lundi 06 novembre 2023

Examen 1- Licence 2- Algèbre linéaire

— *Le problème et les exercices sont indépendants.*
— *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
— *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
— *Tout document de cours est interdit.*

---

1 Questions de cours (8pts)

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C}$ un base de F. Soit $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
   (a) Donner la définition de la trace de d'une matrice.
   (b) Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Soit $u \in E$. Quel est le lien entre le vecteur colonne X des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et le vecteur colonne X' des coordonnées de u dans $\mathcal{B}'$? Le démontrer.
   (c) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Quelle est la relation entre $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(g)$? Démontrer.
2. Soit $n \geqslant 1$, et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont notées $C_1, \ldots C_n$. Montrer que si $det(A) \neq 0$ alors $(C_1, \ldots C_n)$ forme une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que le déterminant d'une matrice ne change pas si à une colonne on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes.

2 Exercice

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux espaces vectoriels suivants :

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\} \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x = z\}$$

1. Vérifier que P et D sont des espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On note p la projection sur P parallèlement à D. Exprimer $p(x, y, z)$.
3. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

3 Problème

Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x, y, z) & \longmapsto & (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y) \end{array}$$

Partie I

1. Donner la matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.

2. Calculer $det(A)$.
3. Déduire que f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer le rang de f et la dimension du $Ker(f)$.
5. Montrer que $Ker(f) = vect(u_1)$ où $u_1 = (2, 2, 1)$.

Partie II

1. Soit $u_2 = e_1 + e_2$ et $u_3 = e_2 - e_3$.
   (a) Calculer $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_2 et u_3.
   (b) En déduire que $u_2 \in Im(f), u_3 \in Im(f)$ et que (u_2, u_3) est une base de $Im(f)$.
2. Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice D de f par rapport à la base $\mathcal{C}$ (sans utiliser les matrices de passages).
4. Déterminer une matrice carré inversible P telle que $D = P^{-1}AP$.
5. Soit n un entier naturel non nul, déterminer la matrice A^n en fonction de P, P^{-1}, D et n.
6. Calculer l'inverse P^{-1} de P.
7. En utilisant les deux questions précédentes, calculer A^n, pour tout entier naturel non nul n.