Licence 2

Année Universitaire 2020-2021
Lundi 14 décembre 2020

Examen 2 - Algèbre linéaire 3 - Première Session

— *Les exercices sont indépendants.*
— *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
— *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
— *Tous les documents de cours sont interdit.*
— *Le sujet peut paraître long, pas de panique le barème sera adapté !*

Exercice 1 : Questions de cours

1. Soit $n \geqslant 1$, et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont notées $C_1, \dots C_n$.
   (a) Montrer que pour $i \neq j \in \{1, \dots n\}$, le déterminant de A change de signe si on échange les colonnes C_i et C_j.
   (b) Donner un formule explicite pour $det(A)$.
   (c) Montrer que si $det(A) \neq 0$, alors $(C_1, \dots C_n)$ forme une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. (On ne demande pas de montrer la réciproque !)
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Donner la définition d'endomorphisme diagonalisable, et de valeur propre.
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f d'ordre α. Montrer que
   $$dim(E_\lambda) \leqslant \alpha.$$
   (c) Soient $\lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de f, et $\alpha_1, \dots \alpha_p$ leur ordres respectifs. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et
   $$dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i, \quad \forall i = 1, \dots p.$$
   (d) Enoncer une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal de f pour que f soit diagonalisable.

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère $f_m \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, est définie par
$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f_m) = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de f_m, et montrer que ses valeurs propres sont 1 et -1.
2. Déterminer l'espace-propre E_1, lorsque $m \neq 0$.
3. Pour quelle(s) valeur de $m \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
4. Déterminer suivant les valeurs de m le polynôme minimal de f_m.

5. On considère dans cette question que $m = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer A^n. Que se passe-t-il si n est pair ?
6. On considère maintenant $m = -1$. Trouver une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f_m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Exercice 3

Soit $n \geqslant 2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$B = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & & b \\ \vdots & b & \ddots & b & \dots & \vdots \\ & \vdots & b & \ddots & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & b & \ddots & \\ b & \dots & b & \dots & b & a \end{pmatrix},$$

la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux valent a et tous les autres coefficients valent b.

Enfin, on note ϕ_B l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ définit pour tout $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ par $\phi_B(X) = BX$.

1. (a) Rappeler le théorème d'Alembert.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable. et $\lambda_1, \dots \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). Montrer que
   $$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$
2. Pour cette question (seulement), on suppose que $a = b = 1$.
   (a) Déterminer $\ker(\phi_B)$ et $Im(\phi_B)$.
   (b) Montrer, sans calculer le polynôme caractéristique que n est valeur propre de ϕ_B, et que l'espace propre associé à n est :
   $$E_n = Im(\phi_B).$$
   (c) En déduire que $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) = \ker(\phi_B) \oplus Im(\phi_B)$.
   (d) ϕ_B est-il diagonalisable ?
3. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques, exprimer B en fonction de a, b, la matrice identité I_n et $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.
4. A l'aide de la question 2, en déduire que les valeurs propres de ϕ_B sont $\lambda_1 = a - b$ et $\lambda_2 = a + (n-1)b$.
5. La matrice est-elle diagonalisable ?