L2 - Algèbre linéaire - CC2 2021 - Correction

M. Cacitti-Holland

14 décembre 2023

1 Questions de cours

2 Exercice

1. Les valeurs propres de A sont exactement les racines de P_A où P_A est le déterminant de la matrice triangulaire supérieure
$$A - XI_3 = \begin{pmatrix} \pi - X & 1 & 2 \\ 0 & \pi - X & 3 \\ 0 & 0 & \pi - X \end{pmatrix},$$
donc de déterminant égal au produit des coefficients diagonaux
$$P_A = \det(A - XI_3) = (\pi - X)^3.$$
Ainsi P_A admet π comme seule racine, donc la seule valeur propre de A est π.
2. On suppose par l'absurde que A est diagonalisable. Alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que
$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1},$$
où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Or d'après la question précédente $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \pi$, donc
$$A = P \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} P^{-1} = P\pi I_3 P^{-1} = \pi I_3$$
ce qui est absurde. Donc A n'est pas diagonalisable. (Ici nous avons un exemple de polynôme caractéristique scindé non simple d'une matrice non diagonalisable.)
3. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(A) = 0$, donc m_A vérifie $m_A \mid P_A = (\pi - X)^3$. Donc $m_A = (X - \pi)^k$, avec $k \in \{1, 2, 3\}$. On ne peut pas avoir $k = 1$ car sinon on aurait m_A scindé simple et donc A diagonalisable. Par conséquent m_A est scindé et non scindé simple.

3 Problème

— On suppose que g est nilpotent. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Alors, en notant $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, nous avons
$$0_{n,n} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g^p) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g))^p.$$
Donc $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$ est nilpotente.

— Réciproquement on suppose que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$ est nilpotente. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g))^p = 0_{n,n}$. Alors nous avons
$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g^p) = (M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g))^p = 0_{n,n}.$$
Ainsi $g^p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Donc g est nilpotent.

3.1 Partie I

1. Nous avons, en développant par rapport à une ligne ou une colonne ou d'après la règle de Sarrus,
$$P_f = P_A = \det(A - XI_3) = ... = -(X-2)^2(X+1).$$
Donc, comme les valeurs propres de f sont exactement les racines de P_f, $\mathrm{Sp}(f) = \{2, -1\}$.
2. P_f est scindé donc f est trigonalisable. Par contre f n'est pas scindé simple donc on ne peut pas conclure directement si f est diagonalisable ou non. Nous avons $\dim(E_{-1}(f)) = 1$ et
$$E_2(f) = \ker(A - 2I_3) = \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}\right),$$
avec, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & y & - & 5z & = & 0 \end{array}\right. \\ \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1}}{\iff} & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ & & 3y & + & 3z & = & 0 \\ & & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \\ \iff & \quad y = -z, \quad x = -2y - 4z = -2z. \end{aligned}$$
Donc, pour $z = -1$, nous obtenons un vecteur propre et
$$E_2(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$
et est de dimension 1. Donc
$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \neq 2 = \dim(E_{-1}(f)) + \dim(E_2(f)).$$
Ainsi f n'est pas diagonalisable.

3.2 Partie II

1. (a) Dans ce cas, nous avons $f(u_1) = -u_1$ et $f(u_2) = 2f(u_2)$.

   (b) Nous pouvons déjà choisir d'après ce qui précède $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On procède de même pour trouver u_1 pour obtenir par exemple $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (c) Soit $u_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u_3) = u_2 + 2u_3$. Alors
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
   Ainsi
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & = & 1 \\ -2x & - & y & - & 5z & = & -1 \end{array}\right.$$

Donc, en effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \\ & & 3y & + & 3z & = & 3 \\ & & 3y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

Donc

$$y = 1 - z, \quad x = 2 - 2y - 4z = 2 - 2(1-z) - 4z = -2z.$$

Ainsi on peut choisir pour $z = -1$, $u_3 = (2, 2, -1)$.

(d) La famille $\mathcal{C}$ est composé de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, donc il suffit de montrer que cette famille est libre pour conclure qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0.$$

En écrivant les valeurs des vecteurs u_1, u_2, u_3, on obtient un système en $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dont la seule solution est $(0, 0, 0)$. On peut également montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

pour conclure que la famille $\mathcal{C}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, comme $f(u_1) = -u_1, f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = u_2 + 2u_3$,

$$B = M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Nous avons

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N,$$

avec D diagonale et N nilpotente car $N^2 = 0_{3,3}$.

3. D'après la formule de changement de base, nous avons $A = PBP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Nous avons donc

$$A = PBP^{-1} = P(D+N)P^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1} = \tilde{D} + \tilde{N},$$

avec $\tilde{D}$ diagonalisable et $\tilde{N}$ nilpotente car $\tilde{N}^2 = PN^2P^{-1} + 0_{3,3}$. On considère $d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\tilde{D}$ dans la base $\mathcal{B}$ et $n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\tilde{N}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors

$$f = d + n,$$

avec d diagonalisable et n nilpotente d'après la première question du problème car $\tilde{N}$ est nilpotente.

4 Partie 4

1.

2. Nous avons, sans oublier l'évaluation des polynômes constants en un vecteurs $4(u_2) = 4u_2$,

$$h(u_2) = f(f(u_2)) - 4f(u_2) + 4u_2 = f(2u_2) - 8u_2 + 4u_2 = 2f(u_2) - 4u_2 = 0_3,$$

et

$$\begin{aligned} h(u_3) &= f(f(u_3)) - 4f(u_3) + 4u_3 = f(u_2 + 2u_3) - 4u_2 - 8u_3 + 4u_3 \\ &= f(u_2) + 2f(u_3) - 4u_2 - 4u_3 = 2u_2 + 2u_2 + 4u_3 - 4u_2 - 4u_3 = 0. \end{aligned}$$

Donc $u_2, u_3 \in \ker(h)$.

3. La famille (u_2, u_3) est libre car extrait de la base $\mathcal{C}$, donc $\dim(\ker(h) \geq 2$. De plus $h(u_1) \neq 0$ (à vérifier) donc $h \neq 0$ donc $\ker(h) \neq \mathbb{R}^3$ donc $\dim(\ker(h)) < 3$. Ainsi $\dim(\ker(h)) = 2$ et (u_2, u_3) est une base de $\ker(h)$.
4. Nous avons

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 2 + 1 = \dim(\ker(h)) + \dim(E_{-1}(f)) = \dim(\ker((f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^2)) + \dim(\ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})),$$

et

$$\ker((f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^2) \cap \ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \cap \mathrm{Vect}(u_3) = \{0_3\}$$

car u_1, u_2, u_3 sont libres. Par conséquent

$$\mathbb{R}^3 = \ker((f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^2) \oplus \ker(f + \mathrm{id}id_{\mathbb{R}^3}).$$