Le Mans Université

Licence 2

Année Universitaire 2021-2022
Mardi 14 décembre 2021

Examen 2 - Algèbre linéaire 3 - Première Session

— *Le problème et les exercices sont indépendants.*
— *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
— *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
— *Tout document de cours est interdit.*
— *Le sujet est long, pas de panique le barème sera adapté !*

---

1 Questions de cours

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir le déterminant pour que f soit un isomorphisme, et le démontrer.
2. Soit $F_1, \ldots F_p$ p sous-espaces vectoriels de E. Rappeler la définition de la somme directe.
3. Montrer que si $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe, alors pour tout $x \in F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, il existe un unique $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2, \ldots, x_p \in F_p$ tels que $x = x_1 + \cdots + x_p$ (la réciproque n'est pas demandée).
4. Montrer qu'un endomorphisme de E est diagonalisable si et seulement si ses espaces propres sont supplémentaires dans E. Attention à bien introduire les notations.
5. A quelle condition(s) nécessaires et suffisantes faisant intervenir le polynôme caractéristique un endomorphisme est-il diagonalisable ? Donner la démonstration.
6. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

2 Exercice

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la seule valeur propre de A est π.
2. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Son polynôme minimal est-il scindé ? scindé simple ? (Justifier).

3 Problème

Préliminaires

On appelle décomposition de Dunford d'un endomorphisme f, la décomposition de cet endomorphisme en la somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent.
On rappelle qu'un endomorphisme g est nilpotent s'il existe $p \geqslant 1$ tel que $g^p = g \circ \cdots \circ g$ est l'application nulle.
Une matrice A est dite nilpotente s'il existe $p \geqslant 1$ tel que A^p est la matrice nulle.

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Montrer g est nilpotent si et seulement sa matrice dans la base canonique est nilpotente.

Partie I

Dans la suite, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathcal{R}^3$, tel que

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.
2. L'endomorphisme est-il diagonalisable ? trigonalisable ?

Partie II

Le but de cette partie est déterminer la décomposition du Dunford de f.

1. On cherche à montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Si l'assertion ci-dessus est vraie, que valent $f(u_1)$ et $f(u_2)$?
   (b) Trouver deux vecteurs vérifiant cette propriété.
   (c) Déterminer un vecteur u_3 vérifiant $f(u_3) = u_2 + 2u_3$.
   (d) Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et que

$$B = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   .

2. Ecrire B comme la somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente.
3. Trouver une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.
4. En déduire la décomposition de Dunford de f.

Partie III

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = X^2 - 4X + 4$ et $h = P(f)$.
2. Montrer que $u_2, u_3 \in \ker(h)$.
3. En déduire que (u_2, u_3) forme une base de $\ker(h)$.
4. Enfin, montrer que

$$\mathbb{R}^3 = \ker((f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2) \oplus \ker(f + Id_{\mathbb{R}^3}).$$