Département de Mathématiques
W. Sabbagh

Année Universitaire 2024-2025
Mardi 10 décembre 2024
2 heures

Examen 2 - Licence 2 - Algèbre linéaire

— *On prendra un soin particulier à la rédaction des réponses.*
— *L'usage des téléphones portables, calculatrices, montres connectées ... est strictement INTERDIT.*
— *Tout document de cours est interdit.*

---

1 Questions de cours

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou$\mathbb{C}$), et $f \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que λ est une valeur propre de f si et seulement si $det(f - \lambda Id_E) = 0$.
   (b) Soit λ une valeur propre de f de multiplicité α. Donner la définition de E_λ et montrer que
$$dim(E_\lambda) \leqslant \alpha.$$
2. Soit A une matrice de taille $n \times n$ à coeffcients réels. On suppose que n est impair et que A est antisymétrique, c'est-à-dire telle que ${}^tA = -A$. Montrer que $det(A) = 0$.
3. Rappeler la définition du polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Montrer que le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ divise son polynôme caractéristique.

2 Problème

Soit $m \in \mathbb{R}$ et soit la matrice
$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m.
2. Soit $Q(X) = X^3 - (m+2)X^2 + (2m+1)X$. Montrer, sans calculer les puissances de A_m, que $Q(A_m) = m\,\mathrm{Id}_3$.
3. Pour $m \neq 0$, déduire que A_m est inversible et donner l'expression de A_m^{-1} en fonction de A_m.
4. On fixe $m = 3$.
   (a) Calculer le polynôme minimal de A_3.
   (b) Déduire que A_3 est diagonalisable.
   (c) Donner une matrice de passage P_3 telle que $P_3^{-1} A_3 P_3$ est diagonale (inutile de calculer l'inverse de P_3).
5. Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, montrer que A_m n'est pas diagonalisable en utilisant le polynôme minimal de A_m.
6. On fixe $m = 1$ et soit f l'endomorphisme associé à la matrice A_1 dans la base canonique.

(a) Montrer que la matrice A_1 n'est pas diagonalisable.

(b) Montrer que l'espace propre associé à la valeur propore 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 0, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.

(c) Chercher un vecteur v tel que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.

(d) Chercher un vecteur w tel que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(w) = u + 2v$.

(e) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(f) Calculer la matrice T de f dans la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$.

(g) Déterminer la matrice C telle que $T = I_3 + C$ et calculer C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(h) Déduire T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(i) Calculer A_1^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.