

Algèbre linéaire 2 - DM 2

D Cacitti

2024-2025

Le but de ce devoir maison est de savoir le faire sans regarder le cours.
On prendra soin de bien introduire toutes les notations.

Question 1. Donner la définition d'une matrice d'application linéaire.

Question 2. Quel est le lien entre le noyau d'une application linéaire et sa matrice dans certaines bases ?

Question 3. Donner la définition d'une matrice de passage.

Question 4. Quel est le lien entre X le vecteur des coordonnées de u dans une base b et X' celui dans une base b' ?

Question 5. Donner la formule de changement de bases. La démontrer.

Question 6. Donner la définition de matrices semblables et la définition de matrices équivalentes. Laquelle des deux propriétés implique l'autre ?

Question 7. Qu'est-ce qu'une permutation ? Une transposition ? Le groupe symétrique ?

Question 8. Pour quelle loi l'ensemble \mathcal{S}_n est-il un groupe ? Le démontrer.

Question 9. Montrer de quel cardinal est le groupe symétrique.

Question 10. Montrer que toute permutation peut s'écrire comme composée de transpositions.

Question 11. Donner la définition de la signature d'une permutation.

Question 12. Quelles sont les signatures des permutations $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

Question 13. Donner la (une) définition du déterminant d'une matrice.

Question 14. Montrer que l'application déterminant est une application linéaire par rapport à chaque colonne.

Question 15. Montrer que si une matrice possède deux colonnes identiques alors son déterminant est nul.

Question 16. Montrer que si l'on échange deux colonnes d'une matrice alors son déterminant devient son opposé.

Question 17. En termes de déterminant, à quelle condition nécessaire et suffisante, une famille de vecteurs est-elle une base ? ~~Le démontrer.~~ Démontrer seulement le sens "???" \implies la famille est une base".

Question 18. En termes de déterminant, à quelle condition nécessaire et suffisante, une application linéaire est-elle un isomorphisme ? Le démontrer.

Question 19. Que se passe-t-il si l'on ajoute à une colonne d'une matrice une combinaison linéaire des autres colonnes ? Le démontrer.

Question 20. Que se passe-t-il si l'on multiplie une colonne d'une matrice par un scalaire ? Le démontrer.

Question 21. ~~Quelle est la formule du déterminant à l'aide du groupe symétrique ?~~

Question 22. Quel est le déterminant de la transposée d'une matrice ? ~~Le démontrer.~~

- Question 23.** Quel est le déterminant d'un produit de matrices ? ~~Le démontrer.~~
- Question 24.** Montrer qu'une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, et donner dans ce cas le déterminant de l'inverse de la matrice.
- Question 25.** Donner la définition d'un endomorphisme diagonalisable.
- Question 26.** Montrer qu'une symétrie est un endomorphisme diagonalisable.
- Question 27.** Donner la définition d'un vecteur propre et d'une valeur propre.
- Question 28.** Montrer que le déterminant de la matrice d'un endomorphisme (même base au départ et à l'arrivée) est invariant par changement de bases.
- Question 29.** Comment fait-on pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme ?
- Question 30.** Comment fait-on pour déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres d'un endomorphisme ?
- Question 31.** Donner la définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
- Question 32.** Quel est son degré ?
- Question 33.** Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres.
- Question 34.** Donner la définition d'un sous-espace propre.
- Question 35.** Montrer qu'ils sont en somme directe.
- Question 36.** Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si l'espace vectoriel est somme directe des sous-espaces propres si et seulement si la dimension de l'espace vectoriel est la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- Question 37.** Montrer que si le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme est égal à la dimension de l'espace vectoriel alors l'endomorphisme est diagonalisable.
- Question 38.** La réciproque de la question précédente est-elle vraie ? Si oui le démontrer. Si non donner un contre-exemple.
- Question 39.** Montrer qu'un scalaire est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement s'il est racine du polynôme caractéristique.
- Question 40.** Montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que les multiplicités des racines λ_i sont égales aux dimensions des sous-espaces propres E_{λ_i} .