Algèbre linéaire 2 - Interro 1 - Correction

M. Cacitti-Holland

2023-2024

Question 1.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on dit que λ est une valeur propre de l'endomorphisme f si $\det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$. Autrement dit si $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$. Autrement dit s'il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est appelé un vecteur propre de l'endomorphisme f associé à la valeur propre λ.

2. On procède par double implications.

   - On suppose que l'endomorphisme f est diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_r$ les valeur propres distinctes de l'endomorphisme f. Alors il existe une base
   $$(u_1^1, ..., u_{n_1}^1, u_1^2, ..., u_{n_2}^2, ..., u_{n_r}^r, ..., u_{n_r}^r)$$
   de l'espace E composée de vecteurs propres de l'endomorphisme f où l'on a noté, pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $u_1^i, ..., u_{n_i}^i$ les vecteurs propres associées à la valeur propre λ_i. Alors nous avons $n = n_1 + ... + n_r$ et, comme, pour tout $i \in \{1, ..., r\}, (u_1^i, ..., u_{r_i}^i)$ est une famille libre (car extrait d'une base) du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$, nous avons aussi $n_i \leq \dim(E_{\lambda_i}(f))$. Or nous avons également que
   $$E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f) \subset E.$$
   Par conséquent
   $$n = n_1 + ... + n_r \leq \dim(E_{\lambda_1}(f)) + ... + \dim(E_{\lambda_r}(f)) = \dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f)) \leq \dim(E) = n.$$
   Donc toutes les inégalités sont en fait des égalités. En particulier $\dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f)) \leq \dim(E)$ et ainsi les sous-espaces propres sont supplémentaires dans E
   $$E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f) = E.$$

   - Réciproquement on suppose que les sous-espaces propres sont supplémentaires dans E :
   $$E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}(f) = E.$$
   Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, on considère une base $(u_1^i, ..., u_{n_1}^i)$ du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ où l'on note $n_i = \dim(E_{\lambda_i}(f))$. Alors, par concaténation, la famille $(u_1^1, ..., u_{n_1}^1, ..., u_1^r, ..., u_{n_r}^r)$ est une famille libre de $n_1 + ... + n_r = \dim(E_{\lambda_1}(f) \oplus ... \oplus E_{\lambda_r})(f)) = \dim(E)$ vecteurs. Donc il s'agit d'une base de l'espace E composée de vecteurs propres de l'endomorphisme f. Ainsi l'endomorphisme f est diagonalisable.

Question 2. On suppose la famille $(C_1, ..., C_n)$ n'est pas une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors, comme il s'agit d'une famille de n vecteurs, il s'agit d'une famille liée : il existe $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i C_i = 0_n$. En particulier il existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Ainsi

$$C_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{i=1, i \neq i_0}^{n} \lambda_i C_i.$$

Nous pouvons donc effectuer l'opération $C_{i_0} \leftarrow C_{i_0} + \dfrac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{i=1, i \neq i_0}^n \lambda_i C_i$ pour obtenir

$$\det(A) = \det(C_1, ..., C_{i_0 - 1}, 0_n, C_{i_0 + 1}, ..., C_n) = 0.$$

Par contraposée on en déduit que si $\det(A) \neq 0$ alors $(C_1, ..., C_n)$ forme une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

Question 3. D'après la formule de changement de bases, nous avons

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E) = P M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) P^{-1}$$

avec $P = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$. Ainsi, comme le déterminant d'un produit est le produit des déterminants et le déterminant de l'inverse d'une matrice est l'inverse du déterminant de la matrice,

$$\det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \det(P) \det(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)) \det(P)^{-1} = \det(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)).$$