Le Mans Université, Licence 2 - Année 2023/24

TD 1 : Applications linéaires.

Exercice 1 **Révisions.** Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (xy, x+y) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+z, 5y) \end{array}\right.$$

Exercice 2. Pour chacune des applications linéaires suivantes :

1. Déterminer le noyau de l'application linéaire. Donner une base et sa dimension.
2. Déterminer l'image de l'application linéaire. Donner une base et sa dimension.
3. L'application est-elle injective, surjective ?

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x+y) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (z, x+y+z, -y) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x-z \end{array}\right.$$

Exercice 3. Soit f l'application linéaire définie par :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, y-x, z+y, x+y+2z) \end{array}$$

1. Donner (sans calculs) une famille génératrice de $Im(f)$.
2. En déduire la dimension de $Im(f)$.
3. L'application est-elle surjective ? Avait-on besoin de déterminer $Im(f)$ pour répondre à cette question ?
4. Donner la dimension de $ker(f)$.

Exercice 4. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de la base $\mathcal{B} = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$, avec

$$e_1 = (1,1,1), \quad e_2 = (1,1,0), \quad e_3 = (1,0,0).$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = e_1 - e_2, \quad f(e_2) = e_2 - e_3, \quad f(e_3) = e_3.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. L'application f est-elle surjective ?
2. Déterminer la décomposition du vecteur dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer $f(x, y, z)$.

Exercice 5.
Soit $m \in \mathbb{R}$ et $u_1 = (m+1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1-m, 2)$, $u_3 = (1, -1, m)$, et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner une condition sur m pour que la famille (u_1, u_2, u_3) soit génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire une condition pour que l'application linéaire φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$$\varphi(e_1) = u_1, \quad \varphi(e_2) = u_2, \quad \varphi(e_3) = u_3.$$
soit injective.

Exercice 6 (*).
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et ϕ une application linéaire de E dans F.
Montrer que ϕ est un isomorphisme si et seulement si l'image par ϕ de toute base de E est une base de F.