Le Mans Université, Licence 2 - Année 2023/24

TD 2 : Matrices

Exercice 1 Matrices triangulaires

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $A, B \in \mathcal{T}$. Montrer que $AB \in \mathcal{T}$.

Exercice 2 Matrices nilpotentes

On appelle **matrices nilpotentes** les matrices carrées dont une puissance est nulle, c'est-à-dire les matrices A telles qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ avec $A^n = 0$.

1. Soit
$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer que N est nilpotente.
2. Montrer que si A est une matrice nilpotente quelconque, alors A n'est pas inversible.
3. (*) Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $I_n - A$ est inversible.

Exercice 3 Autour de la trace...

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $tr(AB) = tr(BA)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :
$$AB - BA = I_n$$
3. Quelles sont les matrices carrées A de taille $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant
$$Tr(A^t A) = 0 \text{ ?}$$

Exercice 4 Proposition de cours

Soit $n, p, l \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{pl}(\mathbb{K})$. Montrer la proposition de cours suivante :
$$^t(AB) = {}^tB^tA.$$

Exercice 5 Matrices symétriques et antisymétriques

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices anti-symétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.