Le Mans Université, Licence 2 - Année 2023/24

TD 3 : Projection et Symétrie

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x - y + z = 0$ et la droite vectorielle D engendrée par $u = (1, 3, 1)$.

1. Vérifier que P et D sont des espaces supplémentaires.
2. On note p la projection sur P parallèlement à D. Exprimer $p(x, y, z)$.
3. On note s la symétrie par rapport à P parallèlement à D. Exprimer $s(x, y, z)$.

Exercice 2 Matrices de projection

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z);\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z\}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la dimension de F et G.
2. En déduire que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
3. Déterminer l'expression de la projection p_F sur F parallèlement à G.
   Indication : On pourra remarquer que pour $u \in \mathbb{R}^3$, $u = p_F(u) + \lambda(3, 2, 1)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p_F(u) \in F$.
4. Déterminer la matrice représentant p_F dans la base canonique.
5. Aurait-on pu choisir une base plus adaptée ?

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et p et q deux projections de E.
On suppose que les deux projections commutent, c'est à dire que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est une projection sur E.
2. Montrer que $Im(p \circ q) = Imp \cap Imq$ et que $Ker(p \circ q) = Kerp + kerq$.