Le Mans Université, Licence 2 - Année 2023/24

TD 4 : Matrices d'applications linéaires (1)

Exercice 1.
Soit $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (1,3)$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme défini par

$$f(u_1) = 2u_2, \quad f(u_2) = u_1 + 2u_2.$$

1. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, avec $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées de $f(x,y)$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définit par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x, -z, y+2z).$$

On considère également les vecteurs $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

1. Déterminer un vecteur u_3 tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire que la famille $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$.

Exercice 3. On considère une application linéaire f de matrice

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
Soient $u_1 = (2,-1,-2)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (-2,1,3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'expression de f.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) En déduire une base de $Im(f)$. f est-elle un isomorphisme ?

Exercice 4.

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$.
On considère les vecteurs $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,-1,0)$, et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f(e_3) = -2e_1 - 2e_2 - 3e_3.$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice D de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exercice 5.

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e_1' = e_2 + e_3, \quad e_2' = e_3 + e_1, \quad e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f_1', f_2') est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 6. Soit ϕ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$dans lui-même, avec $\phi \neq 0$ et $\phi^2 = \phi \circ \phi = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) \neq 0$.
Montrer que $\{x, \phi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de ϕ dans cette base.