Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Xavier Gourdon

Leçons.

1. 230 Séries de nombres réels ou complexes, comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques, exemples
2. 243 Séries entières, propriétés de la somme, exemples et applications

Théorème. Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, f la somme de cette série sur $D(0,1)$, $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\Delta_{\theta_0} := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \exists \rho \in \mathbb{R}_+^*, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$

Alors

$$f(z) \underset{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Démonstration. On note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $R_n = S - S_n$.

<u>Etape 1 : $f(z) - S = (z-1)\sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$ pour $z \in D(0,1)$</u>

Soit $z \in D(0,1)$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - S_n &= \sum_{k=1}^{n} (R_{k-1} - R_k)(z^k - 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} R_k (z^{k+1} - 1) - \sum_{k=1}^{n} R_k (z^k - 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} R_k (z^{k+1} - z^k) - R_n (z^n - 1) \\
&= (z-1) \sum_{k=0}^{n-1} R_k z^k - R_n (z^n - 1)
\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$, comme $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge, et comme $|z|<1$, on obtient

$$f(z) - S = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$$

Etape 2 : Séparer la série en deux et majorer les termes
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, comme $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |R_n| \leq \varepsilon \frac{cos(\theta_0)}{4}$$

Ainsi, pour $z = 1 - \rho e^{i\theta} \in \Delta_{\theta_0}$,

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \varepsilon \frac{cos(\theta_0)}{4} |z-1| \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \leq |z-1| \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{cos(\theta_0)}{4} \frac{|z-1|}{1-|z|}$$

Or, si $\rho \leq cos(\theta_0)$ alors

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho cos(\theta) - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2cos(\theta) - \rho} \leq \frac{2}{cos(\theta_0)}$$

On considère $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (par exemple $\alpha = \frac{2}{cos(\theta_0) \sum_{n=0}^{N} |R_n|}$ si $\sum_{n=0}^{N} |R_n| \neq 0$ et $\alpha = 1$ sinon) et $\delta = inf(\alpha, cos(\theta_0)) \in \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi

$$\forall z \in \Delta_{\theta_0}, |z-1| \leq \delta \Longrightarrow |f(z) - S| \leq \alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| + \varepsilon \frac{cos(\theta_0)}{4} \frac{2}{cos(\theta_0)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui montre que

$$f(z) \underset{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

□

Théorème. Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence 1 et f somme de cette série entière sur $D(0,1)$ telle qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \underset{\substack{x\to 1 \\ x<1}}{\longrightarrow} S$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Démonstration.
Etape 1 : Se ramener à la majoration de deux termes
Soit $z \in D(0,1)$, alors

$$|S_n - S| \leq |S_n - f(x)| + |f(x) - S|$$

Etape 2 : Majorer le premier terme

On a pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$,

$$S_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

Or $\forall k \in [\![1,n]\!], 1-x^k = (1-x)(1+x+...+x^{k-1}) \leq k(1-x)$, donc

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{n}|a_k|x^k$$

De plus $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, k|a_k| \leq M$, d'où

$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)Mn + \frac{\underset{k\geq n+1}{sup}\ k|a_k|}{n(1-x)}$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$, alors

$$\left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq M\varepsilon + \frac{\underset{k\geq n+1}{sup}\ k|a_k|}{\varepsilon}$$

Comme $ka_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow \underset{k\geq n+1}{sup}\ k|a_k| \leq \varepsilon^2$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow \left|S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right)\right| \leq M\varepsilon + \varepsilon = (M+1)\varepsilon$$

Etape 3 : Majorer le second terme et conclure

On a $f(x) \underset{\substack{x\to 1\\ x<1}}{\longrightarrow} S$, donc il existe $N' \geq N$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \Longrightarrow \left|f\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right) - S\right| \leq \varepsilon$, d'où

$$\forall n \geq N' \Longrightarrow |S_n - S| \leq (M+1)\varepsilon + \varepsilon = (M+2)\varepsilon$$

D'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. $\square$