Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Cours d'analyse fonctionnelle de Daniel Li (pour le théorème)
2. Analyse de Xavier Gourdon (pour l'application)

Leçons.

1. 205 Espaces complets, exemples et applications
2. 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues, exemples et applications
3. 246 Séries de Fourier, exemples et applications

Théorème. Soit E espace de Banach, F espace vectoriel normé et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F telle que

$$\forall x \in E, \underset{i\in I}{sup} \|T_i(x)\| < +\infty$$

Alors

$$\underset{i\in I}{sup} \|T_i\| < +\infty$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère

$$F_n := \{x \in E, \forall i \in I, \|T_i(x)\| \leq n\} = \bigcap_{i\in I}\{x \in E, \|T_i(x)\| \leq n\} = \bigcap_{i\in I} (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0,n])$$

Ainsi, comme pour tout $i \in I$, $\|\cdot\| \circ T_i$ est continue et $[0,n]$ fermé, F_n est un fermé de E.
De plus, comme $\forall x \in E, C_x := \underset{i\in I}{sup} \|T_i(x)\| < +\infty$, on a

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

En effet pour $x \in E$, en considérant $n \in \mathbb{N} \cap [C_x, +\infty[$ $(\neq \varnothing)$, on a $x \in F_n$.
Ainsi, d'après le théorème de Baire (sa contraposée plus exactement), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathring{F_n} \neq \varnothing$$

Donc il existe $x_0 \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$B(x, r) \subset F_n$$

Ainsi

$$\forall y \in B(0,1), \forall i \in I, \|T_i(x + ry)\| \leq n$$

D'où, par linéarité de T et inégalité triangulaire,

$$\forall i \in I, \forall y \in B(0,1), \|T_i(y)\| \leq \frac{1}{r}\left(n + \underset{j\in I}{sup}\|T_j(x)\|\right)$$

Par conséquent

$$\underset{i\in I}{sup}\|T_i\| = \underset{i\in I}{sup}\ \underset{y\in B(0,1)}{sup}\|T_i(y)\| \leq \frac{1}{r}\left(n + \underset{j\in I}{sup}\|T_j(x)\|\right) < +\infty$$

□

Application. On considère $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty = \underset{[-\pi,\pi]}{sup}|\cdot|$.
On note également pour $f \in \mathcal{C}$ et $p \in \mathbb{Z}$, $c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}dt$ le p-ième coefficient de Fourier de f.
De plus on considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$l_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \sum\limits_{p=-n}^{n} c_p(f) \end{array}$$

Alors il existe $f \in \mathcal{C}$ tel que

$$f(0) \neq l_n(f)$$

Autrement dit f ne coïncide pas avec sa série de Fourier en 0, donc elles ne coïncident pas non plus sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Etape 1 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l_n est une forme linéaire continue et calcul de $\|l_n\|$
Pour tout $p \in [\![-n, n]\!]$, c_p est linéaire sur $\mathcal{C}$ par bilinéarité du produit sur $\mathbb{C}$ et par linéarité de l'intégration.
Donc l_n est une forme linéaire comme somme finie de formes linéaires.
De plus on a

$$\forall f \in \mathcal{C}, l_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{p=-n}^{n} e^{-ipt}dt$$

avec

$$\forall t \in [-\pi, \pi]\backslash\{0\}, \sum_{p=-n}^{n} e^{-ipt} = \frac{e^{int} - e^{-i(n+1)t}}{1 - e^{-it}} = \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}t} - e^{-i\frac{2n+1}{2}}t}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

D'où

$$\forall f \in \mathcal{C}, l_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

Ainsi pour $f \in \mathcal{C}$ tel que $\|f\|_\infty = 1$, on a

$$|l_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|dt$$

D'où

$$\|l_n\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right|dt$$

Puis pour montrer l'égalité, au lieu d'essayer de trouver une fonction $f \in \mathcal{C}$ atteignant cette borne supérieure, on va construire une famille de fonctions $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*} \in \mathcal{C}^{\mathbb{R}_+^*}$ dont la limite des normes, quand $\varepsilon \to 0$, est le majorant précédent.
Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on considère donc

$$f_\varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \frac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\varepsilon} \end{array}$$

avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, D_n(t) = \begin{cases} \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} & si \quad t \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 1 & si \quad t \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}, D_n(t+2\pi) = \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}(t+2\pi)\right)}{sin\left(\frac{t+2\pi}{2}\right)} = \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t+(2n+1)\pi\right)}{sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)} = \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Et

$$\forall t \in 2\pi\mathbb{Z}, D_n(t+2\pi) = 1 = D_n(t)$$

D'où D_n est 2π-périodique puis f également.
De plus D_n est continue car continue sur $[-\pi, \pi]$, $D_n(-\pi) = D_n(\pi)$ et 2π-périodique, puis $|D_n| + \varepsilon$ est continue et strictement positive.
Par conséquent

$$f_\varepsilon \in \mathcal{C}$$

On a de plus $\|f_\varepsilon\| \leq 1$ car

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}, |f_\varepsilon(t)| = \frac{|D_n(t)|}{|D_n(t)|+\varepsilon} \leq 1, \forall t \in 2\pi\mathbb{Z}, |f_\varepsilon(t)| = 1$$

Puis

$$|l_n(f_\varepsilon)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_n(t)}{|D_n(t)|+\varepsilon}D_n(t)dt\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)|+\varepsilon}dt\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)|+\varepsilon}dt$$

Appliquons le théorème de convergence dominée :

- Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{D_n^2}{|D_n|+\varepsilon}$ est continue sur $[-\pi, \pi]$.
- Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $\frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)|+\varepsilon} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)|} = |D_n(t)|$.
- Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in [-\pi, \pi]$, $\frac{D_n(t)^2}{|D_n(t)|+\varepsilon} \leq |D_n(t)|$ avec $|D_n|$ intégrable sur $[-\pi, \pi]$ car continue.

Ainsi par théorème de convergence dominée on a bien

$$\underset{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}}{lim} |l_n(f_\varepsilon)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt$$

Par conséquent, d'après l'inégalité montrée précédemment sur $\|l_n\|$, on a

$$\|l_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right| dt$$

<u>Etape 2 : Utilisation du théorème de Banach-Steinhaus</u>

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|l_n\| \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{\frac{t}{2}} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left| \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right)}{\frac{t}{2}} \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left| \frac{sin(u)}{u} \right| du$$

avec la penultièmre égalité justifiée par parité et la dernière égalité par changement de variable affine.

Or $\int_0^{\frac{2n+1}{2}\pi} \left| \frac{sin(u)}{u} \right| du \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{sup} \|l_n\| = +\infty$$

De plus on a $\mathcal{C}$ fermé dans l'espace $\mathcal{C}_b$ des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ car

$$\mathcal{C} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t^{-1}(\{0\})$$

avec $\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{C}_b, \varphi_t(f) = f(t + 2\pi) - f(t)$.

On a également $\mathcal{C}_b$ espace de Banach, donc $\mathcal{C}$ est également de Banach.

Ainsi, par contraposée du théorème de Banach-Steinhaus, il existe $f \in \mathcal{C}$ tel que

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{sup} |l_n(f)| = +\infty$$

Autrement dit la série de Fourier de f en 0 diverge. La fonction f est donc différente de sa série de Fourier. $\square$