Décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre et géométrie de Jean-Etienne Rombaldi (pas tout à fait)

Leçons.

1. 153 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie, réduction en dimension finie, exemples et applications
2. 154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismesd'un espace vectoriel de dimension finie, applications
3. 155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie
4. 157 Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents

Proposition. Soit $u \in End(E)$ de polynôme annulateur scindé $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k} \in K[X]$ et $\forall k \in [\![1, p]\!], N_k := ker((u - \lambda_k id_E)^{m_k})$, alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, le projecteur sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} N_j$ est un polynôme en u.

Démonstration.
Etape 1 : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$

D'après le lemme des noyaux, comme les $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont premiers entre eux deux à deux, on a bien

$$E = ker(0) = ker(P(u)) = ker\left(\prod_{k=1}^{p} ker((u - \lambda_k id_E)^{m_k})\right) = \bigoplus_{k=1}^{p} ker((u - \lambda_k id_E)^{m_k}) = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$$

Etape 2 : Construction des projecteurs

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on considère $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (X - \lambda_j)^{m_j}$, alors les Q_k sont premiers dans leur ensemble, d'où, d'après l'identité de Bézout, il existe $U_1, ..., U_p \in K[X]$ tel que

$$U_1 Q_1 + ... + U_p Q_p = 1$$

D'où
$$U_1(u)Q_1(u) + ... + U_r(u)Q_r(u) = id_E$$
Puis pour $k \in [\![1, p]\!]$, on considère $R_k = U_kQ_k$ et $p_k = R_k(u) \in K[u] \subset End(E)$.
Ainsi
$$\sum_{k=1}^{p} p_k = id_E$$
Or $\forall (k, j) \in [\![1, p]\!]^2, k \neq j \Rightarrow P \mid Q_iQ_j$, d'où
$$\forall (k, j) \in [\![1, p]\!]^2, i \neq j \Rightarrow p_k \circ p_j = (Q_kQ_j)(u) \circ (U_kU_j)(u) = 0$$
Ainsi
$$\forall k \in [\![1, p]\!], p_k = id_E \circ p_k = \sum_{j=1}^{p} p_j \circ p_k = 0 + p_k^2 + 0$$
Par conséquent les p_i sont des projecteurs.
Etape 3 : $Im(p_k) = N_k$
Soit $k \in [\![1, p]\!]$ et $y = p_k(x) \in Im(p_k)$.
Alors
$$(X-\lambda_k)^{m_k}(u)(y) = (X-\lambda_k)^{m_k}(R_k(u))(x) = ((X-\lambda_k)^{m_k}Q_kU_k)(u)(x) = U_k(u) \circ P(u)(x) = 0$$
D'où $Im(p_k) \subset N_k$.
Réciproquement pour $x \in N_k$, on a, d'après ce qui précède $x = p_1(x) + ...p_p(x)$.
Or $\forall j \in [\![1, p]\!] \backslash \{k\}, (X - \lambda_k)^{m_k} \mid Q_j \mid R_j$, donc
$$x = 0 + ... + 0 + p_k(x) + 0 + ... + 0 = p_k(x) \in Im(p_k)$$
Ce qui montrer que $N_k \subset Im(p_k)$.
Par conséquent $Im(p_k) = N_k$.
Etape 4 : $ker(p_k) = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} N_j$
Soit $k \in [\![1, p]\!]$, alors pour $j \in [\![1, p]\!] \backslash \{k\}$, $(X - \lambda_j)^{m_j} \mid Q_k$, d'où
$$\forall x \in N_j, p_k(x) = U_k(u) \circ Q_k(u)(x) = 0$$
ie $N_j \subset Ker(p_k)$, d'où $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} N_j \subset ker(p_k)$.
Réciproquement, soit $x \in ker(p_k)$, alors $x = \sum_{j=1}^{p} p_j(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} p_j(x)$, d'où $x \in \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} N_j$.
Par conséquent $ker(p_k) = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq j}}^{p} N_j$.
Etape 5 : Conclusion
Par conséquent p_k est le projecteur sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ k\neq j}}^{p} N_j$, et est un polynôme en u par construction. $\square$

Théorême. Soit $u \in End(E)$ tel que χ_u soit scindé sur K, alors il existe un unique couple $(d,n) \in (End(E))^2$ tel que d soit diagonalisable, n soit nilpotente, $u = d + n$ et $dn = nd$, de plus $d, n \in K[u]$

Démonstration.
Etape 1 : Existence

Comme χ_u est scindé, on peut écrire $\chi_u = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{m_k}$. On applique alors la proposition précédente avec $P = \chi_u$ annulateur de u d'après le théorème de Cayley-Hamilton.
Ainsi les $p_k = R_k(u)$ sont les projecteurs sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{p} N_j$.

On pose

$$d = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k p_k, n = u - d = \sum_{k=1}^{p}(u - \lambda_k id_E) \circ p_k$$

Ainsi d est diagonalisable car les p_k sont des polynômes en u, donc commutent entre eux, et ils sont diagonalisables car annulés par $X^2 - X = X(X-1)$ scindé à racines simples, ainsi les p_k sont codiagonalisables ce qui diagonalise d.
De plus par récurrence sur $q \in \mathbb{N}^*$ on a

$$n^q = \sum_{k=1}^{p}(u - \lambda_k id_E)^q p_k$$

En effet l'initialisation est immédiate et la récurrence vient du fait que les p_k sont des polynômes en u et $p_k \circ p_j = 0$ si $k \neq j$,

$$n^{q+1} = \sum_{1 \leq k,j \leq p}(u - \lambda_k id_E)^q \circ (u - \lambda_j id_E) \circ p_k \circ p_j = \sum_{k=1}^{p}(u - \lambda_k id_E)^{q+1} p_k$$

En particulier pour $q = \underset{1 \leq k \leq p}{max}(m_k)$, on a

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \chi_u \mid (X - \lambda_k)^q Q_k \mid (X - \lambda_k)^q U_k Q_k = (X - \lambda_k)^q R_k$$

D'où

$$(u - \lambda_k id_E)^q p_k = ((X - \lambda_k)^q R_k)(u) = 0$$

Ainsi $n^q = 0$, ie n est nilpotent.
Finalement on a bien d et n des polynômes en u, en particulier d et n commutent.
Etape 2 : Unicité
Soit (d', n') un autre couple vérifiant le théorème.
Alors d' et n' commutent avec $d' + n' = u$, donc avec d et n qui sont des polynômes en f.
En particulier d et d' sont codiagonalisables, d'où $d - d' = n' - n$ est diagonalisable.
De plus $d - d' = n' - n$ est nilpotente, on en déduit donc $d = d', n = n'$. $\square$