Résolution d'une équation aux dérivées partielles par changement de coordonnées

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Petit guide de calcul différentiel de François Rouvière

Leçons.

1. 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites, exemples et applications en analyse et en géométrie
2. 222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires

Théorème. Les solutions générales de

$$L(f) = (y-z)\frac{\partial f}{\partial x} + (z-x)\frac{\partial f}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

qui sont de classe C^1 sur le demi espace $U = \{y > z\}$ sont de la forme

$$f(x,y,z) = \phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$$

avec ϕ de classe C^1 sur l'ouvert $W = \{u^2 < 3v\} \subset \mathbb{R}^2$.

Démonstration.
Etape 1 : Solutions particulières
On suppose $\mathbb{R}^3$ muni du produit sclaire usuel, alors pour une solution f de $L(f) = 0$, on a $\left\langle \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$ avec $\begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On peut donc penser à $\nabla f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui amène à $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ ou $f(x,y,z) = x+y+z$.
En effet deux solutions particulières sont

$$u(x,y,z) = x+y+z, v(x,y,z) = x+y+z$$

Etape 2 : Compléter cette famille en un changement de coordonnées locales
Les différentielles de u et v sont indépendantes en tout point, donc, d'après un corollaire du

théorème d'inversion locale, on peut compléter (u, v) est un système de coordonnées locales au voisinage de chaque point. Cependant les voisinages ne sont pas clairement définis, essayons donc de les préciser.
On considère $w(x, y, z) = x$, ainsi $\varphi(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car les fonctions composantes sont polynomiales en les coordonnées. De plus on considère deux ouverts de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{y > z\}, V = \{2v > (u - w)^2 + 2w^2\}$$

Alors, pour $(x, y, z) \in U, (u, v, w) \in V$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & u \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & v \\ x & = & w \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y + z & = & u - w \\ y^2 + z^2 & = & v - w^2 \\ x & = & w \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y + z & = & u - w \\ yz & = & \frac{1}{2}((u - w)^2 - (v - w^2)) \\ x & = & w \end{array}\right.$$

Avec la dernière équivalence justifiée par :

- Sens direct : $(y + z)^2 - (y^2 + z^2) = (u - w)^2 - (v - w^2)$
- Sens indirect : $(y + z)^2 - 2yz = (u - w)^2 - 2\left(\frac{1}{2}((u - w)^2 - (v - w)^2)\right) = v - w^2$

Donc, d'après le lemme suivant, comme $y > z$, y et z sont déterminés de manière unique par leur somme s et leur produit p si et seulement si $s^2 > 4p$.
Ainsi, dans le cas d'équivalence prédécent, si et seulement si $(u-w)^2 > 2((u-w)^2 - (v-w^2))$ ie $2v > (u - w)^2 + 2w^2$ ce qui est le cas car $(u, v, w) \in V$.
Par conséquent $\varphi : U \longrightarrow V$ est un C^1-difféomorphisme, car x, y, z s'expriment comme des fonctions C^1 de u, v, w.
<u>Etape 3 : Réécriture de l'équation aux dérivées partielles</u>
On note $f = g \circ (u, v, w) = g \circ \varphi$, ainsi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x, y, z))\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(x, y, z))\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial g}{\partial w}(\varphi(x, y, z))\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x, y, z)$$

et idem pour les autres dérivées partielles.
Donc

$$L(f) = (y - z)\frac{\partial f}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial f}{\partial y} + (x - y)\frac{\partial f}{\partial z} = a\frac{\partial g}{\partial u} + b\frac{\partial g}{\partial v} + c\frac{\partial g}{\partial w}$$

avec a, b, c fonctions indépendantes de f et de g.
Or $f(x, y, z) = u(x, y, z)$ et $f(x, y, z) = v(x, y, z)$ sont des solutions, donc

$$0 = L(u) = a, 0 = L(v) = b$$

De plus si $f(x, y, z) = w(x, y, z) = x$ alors $g(u, v, w) = f \circ \varphi^{-1}(u, v, w) = w$, d'où $c = L(w)$.
Par conséquent l'équation devient

$$0 = L(w)\frac{\partial g}{\partial w} = (y - z)\frac{\partial g}{\partial w}$$

Donc sur V l'équation se réécrit

$$0 = \frac{\partial g}{\partial w}$$

Etape 4 : Résolution de cette équation
Or

$$V = \{2v > (u-w)^2 + 2w^2\} = \{6v > 3(u-w)^2 + 6w^2\} = \{(3w-u)^2 < 2(3v-u^2)\}$$

Donc sur $V \cap (W \times \mathbb{R}) = V \cap (\{u^2 < 3v\} \times \mathbb{R})$, l'équation admet des solutions et se résout en

$$g(u,v,w) = \phi(u,v)$$

avec $\phi : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.
Finalement, après vérifications, les solutions de notre équation sont de la forme

$$f(x,y,z) = \phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$$

$\square$

Lemme. Soit $F : (y,z) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (y+z, yz) \in \mathbb{R}^2$, alors F est un C^1-difféomorphisme de $A = \{y > z\} \subset \mathbb{R}^2$ dans $B = \{s^2 - 4p > 0\}$.

Démonstration.
Soit $y, z, s, p \in \mathbb{R}$, on cherche à résoudre

$$\begin{cases} y+z &= s \\ yz &= p \end{cases}$$

ce qui revient à dire que y et z sont les deux racines de l'équation $X^2 - sX + p = 0$ qui admet des solutions réelles si et seulement si $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$.
Ainsi si $(s,p) \in B = \{s^2 - 4p > 0\}$ et $(y,z) \in A = \{y > z\}$ alors

$$F(y,z) = (s,p) \Longleftrightarrow (y,z) = \left(\frac{s+\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{s-\sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

Par conséquent $F : A \longrightarrow B$ est un C^1-difféomorphisme car les fonctions composantes de F et F^{-1} sont de classe C^1 sur A ou B. $\square$