Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre d'Aviva Szpirglas

Leçons.

1. 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie, exemples et applications
2. 160 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (en dimension finie)
3. 161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien
4. 181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité, applications
5. 253 Utilisation de la notion de la convexité en analyse

Lemme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'espace dual de $M_n(\mathbb{R})$ est

$$(M_n(\mathbb{R}))' = \{tr(A \times id_{M_n(\mathbb{R})}), A \in M_n(\mathbb{R})\}$$

Démonstration. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & (M_n(\mathbb{R}))' \\ A & \longmapsto & tr(A \times id_{M_n(\mathbb{R})}) \end{array}$$

Bien définie et linéaire par linéarité de la trace.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), tr(AM) = \varphi(A)(M) = 0$$

En particulier,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, 0 = tr(AE_{i,j}) = A_{j,i}$$

D'où $A = 0$ ce qui montre que φ est injective.
D'où, par égalité des dimensions, φ est un isomorphisme, en particulier surjectif, donc

$$\forall \varphi \in (M_n(\mathbb{R}))', \exists A \in M_n(\mathbb{R}), \varphi = tr(A \times id_{M_n(\mathbb{R})})$$

□

Lemme. Soit C un convexe fermé non vide de $M_n(\mathbb{R})$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall \varphi \in (M_n(\mathbb{R}))', \varphi(M) \leq \sup_{N \in C}(\varphi(N))$$

Alors $M \in C$.

Démonstration. On suppose par l'absurde que $M \notin C$.
Alors, d'après le théorème de Hahn-Banach version géométrique,

$$\underset{N \in C}{sup}(\varphi(N)) < \varphi(M)$$

Ce qui est absurde.
Par conséquent $M \in C$. $\square$

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermé pour la norme $\|\cdot\|_2$, ie

$$Conv(O_n(\mathbb{R})) = \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1)$$

Démonstration.
Etape 1 : Première inclusion
On a $B := \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0,1) \subset M_n(\mathbb{R})$ convexe car

$$\forall (M,N) \in B^2, \forall \lambda \in [0,1], \|(1-\lambda)M + \lambda N\|_2 \leq (1-\lambda)\|M\|_2 + \lambda \|N\|_2 \leq 1 - \lambda + \lambda = 1$$

De plus

$$\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \|M\|_2 = \underset{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_2 = 1}}{sup}(\|Mx\|_2) = \underset{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_2 = 1}}{sup}(\|x\|_2) = 1$$

D'où $O_n(\mathbb{R}) \subset B$.
Donc, par définition de l'enveloppe convexe,

$$Conv(O_n(\mathbb{R})) \subset B$$

Etape 2 : Seconde inclusion
Soit $M \in B$.
Soit $\varphi \in (M_n(\mathbb{R}))'$, alors, d'après le premier lemme, il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall N \in M_n(\mathbb{R}), \varphi(N) = tr(AN)$$

Or, par décomposition polaire de A, il existe $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que

$$A = OS$$

Or S est orthodiagonalisable, donc il existe une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de S, ie pour tout $i \in [\![1,n]\!], Se_i = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ car S positive.
Donc

$$\varphi(O^{-1}) = tr(AO^{-1}) = tr(OSO^{-1}) = tr(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{\|e_i\|_2}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda e_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|_2$$

Or on a également, en notant $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice de passage de $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ à $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ (orthogonale car e et b sont deux bases orthonormales),

$$tr(AM) = tr(MA) = tr({}^tPMAP) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tPMAP)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} {}^tb_i^t PMAPb_i = \sum_{i=1}^{n} {}^t({}^tMe_i)Ae_i$$

ie

$$\varphi(M) = tr(AM) = \sum_{i=1}^{n} \langle {}^tMe_i, Ae_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle {}^tMe_i, OSe_i\rangle$$

Puis, par inégalité de Cauchy-Schwarz, comme O orthogonale et $M \in B$,

$$\varphi(M) \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left\|{}^tM\right\|_2}_{\leq 1} \underbrace{\|e_i\|_2}_{=1} \underbrace{\|O\|_2}_{=1} \|Se_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|_2 = \varphi(O^{-1})$$

La dernière égalité étant justifiée par un calcul précédent, d'où

$$\varphi(M) \leq \varphi(O^{-1}) \leq \underset{N \in O_n(\mathbb{R})}{sup} (\varphi(N)) \leq \underset{N \in Conv(O_n(\mathbb{R}))}{sup} (\varphi(N))$$

Or $O_n(\mathbb{R})$ est fermé comme image réciproque de $\{I_n\}$ fermé par l'application continue $A \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto {}^tAA \in M_n(\mathbb{R})$ et borné car les vecteurs colonnes de $A \in O_n(\mathbb{R})$ sont de norme 1 donc les coefficients de A sont bornées par 1.
D'où, comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $O_n(\mathbb{R})$ est compacte.
<u>Sous-étape : L'enveloppe convexe d'un compact est un compact en dimension finie</u> (à ne pas détailler)
Soit $(O_p)_{p\in\mathbb{N}} \in Conv(O_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$.
Par théorème de Carathéodory dans $M_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_{p,1}, ..., \lambda_{p,n^2+1} \in \mathbb{R}_+^{n^2+1}$ et $O_{p,1}, ..., O_{p,n^2+1} \in O_n(\mathbb{R})$ tels que

$$O_p = \sum_{k=1}^{n^2+1} \lambda_{p,k} O_{p,k} \text{ et } \sum_{k=1}^{n^2+1} \lambda_{p,k} = 1$$

Or les suites $(O_{p,k})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda_{p,k})_{p\in\mathbb{N}}$, pour $k \in [\![1, n^2+1]\!]$, sont dans des compactes, respectivement $O_n(\mathbb{R})$ et $[0,1]$.
Ainsi, par extractions successives, on construit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, $O_{\infty,k} \in O_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_{\infty,k} \in [0,1]$, pour $k \in [\![1, n^2+1]\!]$, tels que, pour tout $k \in [\![1, n^2+1]\!]$,

$$O_{\varphi(p),k} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} O_{\infty,k} \text{ et } \lambda_{\varphi(p),k} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_{\infty,k}$$

Ainsi, en passant à la limite dans $O_{\varphi(p)} = \sum\limits_{k=1}^{n^2+1} \lambda_{\varphi(p),k} O_{\varphi(p),k}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n^2+1} \lambda_{\varphi(p),k} = 1$, on obtient

$$O_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n^2+1} \lambda_{\infty,k} O_{\infty,k} \text{ et } \sum_{k=1}^{n^2+1} \lambda_{\infty,k} = 1$$

D'où $(O_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $Conv(O_n(\mathbb{R}))$.
Par conséquent $Conv(O_n(\mathbb{R}))$ est compact, en particulier fermé.
On peut donc appliquer le second lemme, $M \in Conv(O_n(\mathbb{R}))$ ce qui montre que

$$B \subset Conv(O_n(\mathbb{R}))$$

$\square$