Théorème de convergence de Féjer

Dorian Caciti-Holland

2020-2021

Références.

1. Analyse de Queffélec et Zuily

Leçons.

1. 209 Approximation par des fonctions régulières, exemples et applications
2. 213 Espaces de Hilbert, bases hilbertiennes, exemples et applications
3. 241 Suites et séries de fonctions, exemples et applications
4. 246 Séries de Fourier, exemples et applications

Lemme. Le noyau de Féjer $K_N = \frac{D_0+...+D_{N-1}}{N}$ vérifie :

1. $K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$
2. $K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 \geq 0$
3. $\|K_N\|_1 = 1$
4. Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\sigma_N(f) = \frac{S_0(f)+...S_{N-1}(f)}{N}$ moyenne de Cesàro des $S_n(f)$, alors

$$\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n$$

Démonstration.

1. Par définition on a

$$NK_N = \sum_{j=0}^{N-1} D_j = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{|n|\leq j} e_n\right) = \sum_{|n|\leq N-1} (N - |n|) e_n = \sum_{|n|\leq N} (N - |n|) e_n$$

   La pénultième égalité étant justifié par une inversion entre deux sommes finies.

2. Comme $D_N(x) = \frac{sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}$, on a

$$NK_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} D_j(x) = \frac{1}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} Im \left(\sum_{j=0}^{N-1} e^{i\left(j+\frac{1}{2}\right)x}\right) = \frac{1}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} Im \left(e^{i\frac{x}{2}} \frac{1 - e^{iNx}}{1 - e^{ix}}\right) = \left(\frac{sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

3. Comme K_N positif et d'après 1, on a

$$\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \sum_{|n|\leq N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e_n(t)dt = 1$$

4. Or

$$N\sigma_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = \sum_{n=0}^{N-1} f * D_n = f * \sum_{n=0}^{N-1} D_n = f * NK_N$$

   Donc, d'après 1,

$$\sigma_N(f) = f * K_N = \sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n$$

□

Théorême. Soit $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alors

$$\forall N \in \mathbb{N}, \|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

Et

$$\sigma_N(f) \underset{N\to+\infty}{\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}} f$$

Démonstration.
D'après le lemme précédent,

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty = \|f * K_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|K_N\|_1 = \|f\|_\infty$$

Soit $\delta \in]0,\pi]$, $\omega(\delta) = sup(|f(u)-f(v)|, (u,v) \in \mathbb{R}^2, |u-v| \leq \delta)$ le module de continuité de f, et $x \in \mathbb{R}$, alors, d'après le lemme précédent,

$$f(x) - \sigma_N(f)(x) = f(x) - f * K_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x-t))K_N(t)dt$$

D'où

$$\begin{array}{rcl} |f(x)-\sigma_N(f)(x)| & \leq & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{|t|\leq\delta}|f(x)-f(x-t)|K_N(t)dt \\ & & +\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<t\leq\pi}|f(x)-f(x-t)|K_N(t)dt \\ & & \leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta}K_N(t)dt + 2\|f\|_\infty\int_{\delta<t\leq\pi}K_N(t)dt \\ & & \leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{Nsin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \end{array}$$

Donc

$$\|f-\sigma_N(f)\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{Nsin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}$$

D'où, par continuité uniforme de f, (car continue et 2π-périodique) et comme $\frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\sigma_N(f) \underset{N\to+\infty}{\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}} f$$

□

Théorême. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors

$$\forall N \in \mathbb{N}, \|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$$

Et

$$\sigma_N(f) \xrightarrow[N \to +\infty]{\|\cdot\|_p} f$$

Démonstration.
D'après l'inégalité de Hölder appliqué à la mesure $\frac{1}{2\pi} K_N(t)dt$ de masse 1,

$$|\sigma_N(f)(x)|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \times 1 K_N(t)dt \right|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_N(t)dt$$

Donc par théorème de Fubini-Tonelli,

$$\|\sigma_N(f)\|_p^p \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p dx \right) K_N(t)dt = \|K_N\|_1 \|f\|_p^p = \|f\|_p^p$$

Le même calcul donne

$$\|f - \sigma_N(f)\|_p^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) g(-t)dt = \sigma_N(g)(0)$$

avec $g(t) = \|f - \tau_t f\|_p^p$.
Or $g \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donc, d'après le théorème précédent,

$$\sigma_N(g)(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(0) = 0$$

D'où

$$\sigma_N(f) \xrightarrow[N \to +\infty]{\|\cdot\|_p} f$$

$\square$