Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Algèbre de Xavier Gourdon (pour le théorème)

Leçons.

1. 152 Déterminants, exemples et applications
2. 161 Distances et isométries d'un espace affine euclidien
3. 191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Lemme. Soit $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ famille liée alors $G(x_1, ..., x_n) = 0$.

Démonstration.
Il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \backslash \{(0, ..., 0)\}$ tel que $0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$.
Ainsi

$$\forall i \in [\![1, n]\!], 0 = \langle x_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} \langle x_i, x_j \rangle$$

Ce qu'on peut écrire vectoriellement

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i \leq n}$$

Donc les vecteurs $((\langle x_i, x_1 \rangle)_{1 \leq i \leq n}, ..., (\langle x_i, x_n \rangle)_{1 \leq i \leq n})$ sont liés.
Par conséquent $G(x_1, ..., x_n) = det((\langle x_i, x_1 \rangle)_{1 \leq i \leq n}, ..., (\langle x_i, x_n \rangle)_{1 \leq i \leq n}) = 0$. □

Théorème. Soit F sous-espace vectoriel de E de dimension $dim(F) = n$, $(e_1, ..., e_n)$ une base de F et $x \in E$, alors

$$G(e_1, ..., e_n, x) = d(x, F)^2 G(e_1, ..., e_n)$$

Démonstration. Comme F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, $d(x, F)$ est atteint en un unique point $\pi_F(x) \in F$, ie

$$d(x, F) = \|x - \pi_F(x)\|$$

Avec également

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \langle x, e_i\rangle = \langle \pi_F(x), e_i\rangle \text{ et } \|x\|^2 = \|\pi_F(x)\|^2 + \|x - \pi_F(x)\|^2$$

Donc

$$\begin{aligned} Gram(e_1,...,e_n,x) &= \begin{pmatrix} & & & \langle e_1, x\rangle \\ & Gram(e_1,...,e_n) & & \vdots \\ & & & \langle e_n, x\rangle \\ \langle x, e_1\rangle & \dots & \langle x, e_n\rangle & \langle x, x\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & & & \langle e_1, \pi_F(x)\rangle \\ & Gram(e_1,...,e_n) & & \vdots \\ & & & \langle e_n, \pi_F(x)\rangle \\ \langle \pi_F(x), e_1\rangle & \dots & \langle \pi_F(x), e_n\rangle & \|\pi_F(x)\|^2 + \|x-\pi_F(x)\|^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, par linéarité du déterminant selon la dernière colonne,

$$Gram(e_1,...,e_n,x) = G(e_1,...,e_n,\pi_F(x)) + \|x-\pi_F(x)\|^2 G(e_1,...,e_n) = 0 + d(x,F)^2 G(e_1,...,e_n)$$

avec $G(e_1,...,e_n,\pi_F(x)) = 0$ car la famille $(e_1,...,e_n,\pi_F(x))$ est liée. □

Corollaire. Soit $(x_1,...,x_n) \in E^n$, alors :

— $G(x_1,...,x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

— Si $E = \mathbb{C}^n$ alors $|det(x_1,...,x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$.

De plus on a égalité si et seulement si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ orthogonale ou si l'un des vecteurs est nul.

Démonstration.
Etape 1 : Cas où la famille $(x_1,...,x_n)$ est liée
Dans ce cas, d'après le lemme précédent, $G(x_1,...,x_n) = 0$ et l'inégalité est trivialement vérifiée, il s'agit même d'une inégalité stricte si les x_i sont non nuls.
Etape 2 : Cas où la famille $(x_1,...,x_n)$ est libre
On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

— Pour $n = 1$, on a $G(x_1) = \|x_1\|^2$

— On suppose le résultat vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(x_1,...,x_{n+1}) \in E^{n+1}$ libre.
On considère $F = Vect(x_1,...,x_n)$ de dimension n de base $(x_1,...,x_n)$, et $\pi_F(x_{n+1})$ la projection orthogonale de x_{n+1} sur F.
On a par caractérisation du projeté orthogonal $x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1}) \perp \pi_F(x_{n+1})$, donc

$$\|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 \leq \|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 + \|\pi_F(x_{n+1})\|^2 = \|x_{n+1}\|^2$$

avec égalité si et seulement si $\pi_F(x_{n+1}) = 0$ ie $x_{n+1} \in F^\perp$.
Ainsi, en utilisant le théorème précédent,

$$G(x_1,..,x_{n+1}) = G(x_1,...,x_n)\,\|x_{n+1} - \pi_F(x_{n+1})\|^2 \leq G(x_1,...,x_n)\,\|x_{n+1}\|^2$$

Donc, par hypothèse de récurrence,

$$G(x_1, ..., x_{n+1}) \leq \prod_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2$$

avec égalité si et seulement si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille orthogonale par hypothèse de récurrence et si x_{n+1} orthogonale à F, donc si et seulement si $(x_1, ..., x_{n+1})$ est une famille orthogonale.

Le principe de réucurrence permet de conclure.

Etape 3 : Cas où $E = \mathbb{C}^n$

En notant $N \in M_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont les x_i, on a

$$Gram(x_1, ..., x_n) = \overline{{}^tN}N$$

D'où

$$G(x_1, ..., x_n) = |det(N)|^2$$

Et d'après ce qui précède on a bien

$$|det(x_1, ..., x_n)|^2 = |det(N)|^2 = G(x_1, ..., x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

Avec égalité si et seulement si $(x_1, ..., x_n)$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul. □

Remarque. (S'il reste du temps) Soit $(x_1, ..., x_n) \in E^n$ tel que $G(x_1, ..., x_n) = 0$, alors la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée.

Démonstration.
Comme $G(x_1, ..., x_n) = 0$, la famille $((\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i\leq n})_{1\leq j\leq n}$ est liée, ie il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $(\langle x_i, x_k\rangle)_{1\leq i\leq n}$ soit combinaison linéaire des $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i\leq n}$ pour $j \in [\![1, n]\!]$, ie il existe $(\lambda_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{C}^n \backslash \{(0, ..., 0)\}$ tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \langle x_i, x_k\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_i, x_j\rangle = \langle x_i, \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} x_j\rangle$$

D'où

$$x_k - \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_j} x_j \in Vect(x_1, ..., x_n)^\perp \cap Vect(x_1, ..., x_n) = \{0\}$$

Donc la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée. □