Formes de Hankel

Dorian Cacitti-Holland

2020-2021

Références.

1. Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 1 de Caldero et Germoni

Leçons.

1. 144 Racines de polynômes, fonctions symétriques élementaires, exemples et applications
2. 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie, exemples et applications
3. 170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie, orthogonalité, isotropie, applications
4. 171 Formes quadratiques réelles, coniques, exemples et applications

Théorême. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de racines complexes distinctes $x_1, ..., x_t$ de multiplicités respectives $m_1, ..., m_t$ et $s_k = m_1 x_1^k + ... m_t x_t^k$, alors

$$\sigma_{\mathbb{R}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \sum\limits_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} y_i y_j \end{array} \in Q(\mathbb{R}^n)$$

De plus si on note $(p, q) = sign(\sigma_{\mathbb{R}})$ alors le nombre de racines de P est $t = p + q$ et le nombre de racines réelles distinctes de P est $r = p - q$.

Démonstration.
<u>Etape 1 : $\sigma_{\mathbb{R}} \in Q(\mathbb{R}^n)$</u>
Quitte à réindexer on peut supposer $x_1, ..., x_r \in \mathbb{R}, x_{r+1}, ..., x_{r+\frac{t-r}{2}} \notin \mathbb{R}$ et $x_{r+\frac{t-r}{2}+1} = \overline{x}_{r+1}, ..., x_t = \overline{x}_{x+\frac{t-r}{2}}$.
Or, pour $j \in [\![1, r + \frac{t-r}{2}]\!]$, x_j et $\overline{x}_j = x_{j+\frac{t-r}{2}}$ ont même multiplicité ie $m_j = m_{j+\frac{t-r}{2}}$, donc

$$s_k = \sum_{j=1}^{t} m_j x_j^k = \sum_{j=1}^{r} m_j x_j^k + \sum_{j=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} m_j x_j^k + \sum_{j=r+\frac{t-r}{2}+1}^{t} m_j x_j^k = \sum_{j=1}^{r} m_j x_j^k + \sum_{j=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} m_j (x_j^k + \overline{x_j}^k)$$

Ainsi les s_k sont réelles car $\overline{s}_k = s_k$, donc $\sigma_{\mathbb{R}}$ est un polynôme homogène de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$, d'où

$$\sigma_{\mathbb{R}}(y) = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} y_i y_j \in Q(\mathbb{R}^n)$$

Etape 2 : Ecrire $\sigma_{\mathbb{R}}$ comme somme de formes linéaires indépendantes au carré

On considère

$$\varphi_k(y) = y_0 + x_k y_1 + x_k^2 y_2 + ... + x_k^{n-1} y_{n-1}$$

Alors $\varphi_k \in (\mathbb{C}^n)^*$, de plus en notant $(e_i^*)_{0 \leq i \leq n-1}$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{C}^*$, on a $\varphi_k(e_j) = x_k^j$, donc

$$\varphi_k = e_0^* + x_k e_1^* + ... + x_k^{n-1} e_{n-1}^*$$

Ainsi

$$Mat_{e^*}(\varphi_1, ..., \varphi_t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_t^{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n,t}(\mathbb{C})$$

avec $t \leq n$ car un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.
On peut extraire de cette matrice une matrice carrée de taille t inversible comme matrice de Vandermonde associée à une famille d'éléments distincts.
Ainsi $(\varphi_1, ..., \varphi_t)$ est une famille de rang t ie libre.
De plus le coefficient de $y_i y_j$ dans la forme quadratique φ_k^2 est $x_k^i x_k^j$ si $i = j$ et $2x_k^i x_k^j$ si $i \neq j$ car

$$\begin{aligned} \varphi_k(y)^2 &= (y_0 + x_k y_1 + x_k^2 y_2 + ... + x_k^{n-1} y_{n-1})(y_0 + x_k y_1 + x_k^2 y_2 + ... + x_k^{n-1} y_{n-1}) \\ &= y_0(y_0 + x_k y_1 + x_k^2 y_2 + ... + x_k^{n-1} y_{n-1}) + ... + x_k^{n-1} y_{n-1}(y_0 + x_k y_1 + x_k^2 y_2 + ... + x_k^{n-1} y_{n-1}) \\ &= ... + 2x_k^i x_j^i y_i y_j + ... \ si \ i \neq j \\ &= ... + x_k^{2i} y_i y_j + ... \ si \ i = j \end{aligned}$$

Ainsi le coefficient de $y_i y_j$ dans la forme quadratique $\sum\limits_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$ est

$$\sum_{k=1}^{t} 2m_k x_k^i x_k^j = \sum_{k=1}^{t} 2m_k x_k^{i+j} = 2s_{i+j} \ si \ i \neq j$$

et

$$\sum_{k=1}^{t} m_k x_k^i x_k^j = s_{i+j} \ si \ i = j$$

Par conséquent on a l'égalité entre les deux formes quadratiques sur $\mathbb{C}^n$

$$\sigma_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$$

Ainsi, comme les φ_k sont indépendants, dans $\mathbb{C}$, on a $rg(\sigma_{\mathbb{R}}) = t$ et également dans $\mathbb{R}$ car le rang est invariant par extension de corps.
De plus $rg(\sigma_{\mathbb{R}}) = p + q$, d'où, par transitivité de la relation d'égalité, le nombre de racines distinctes de P est

$$t = p + q$$

Etape 3 : En déduire le nombre de racines réelles distinctes de P
Or, pour $z \in \mathbb{C}$, on a $z^2 + \overline{z}^2 = 2Re(z)^2 + 2Im(z)^2$, ainsi

$$\sigma_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi_k^2 + \sum_{k=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} m_k(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2) = \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi_k^2 + 2\sum_{k=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} m_k Re(\varphi_k)^2 - 2\sum_{k=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} m_k Im(\varphi_k)^2$$

De plus on a indépendance entre les formes linéaires réelles apparaissant dans cette somme $\varphi_1, ..., \varphi_r, Re(\varphi_{r+1}), ..., Re(\varphi_{r+\frac{t-r}{2}}), Im(\varphi_{r+1}), ..., Im(\varphi_{r+\frac{t-r}{2}})$.
En effet soit $\lambda_1, ..., \lambda_r, \mu_{r+1}, ...\mu_{r+\frac{t-r}{2}}, \mu'_{r+1} ...., \mu'_{r+\frac{t-r}{2}} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k + \sum_{k=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} \mu_k Re(\varphi_k) + \sum_{k=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} \mu'_k Im(\varphi_k) = 0$$

Ainsi, comme pour $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, on obtient,

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k + \frac{1}{2}\sum_{k=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} \mu_k(\varphi_k + \overline{\varphi}_k) + \frac{1}{2i}\sum_{k=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} \mu'_k(\varphi_k - \overline{\varphi}_k) = 0$$

ie

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k + \frac{1}{2}\sum_{k=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} (\mu_k - i\mu'_k)\varphi_k + \frac{1}{2}\sum_{k=r+1}^{r+\frac{t-r}{2}} (\mu_k + i\mu'_k)\overline{\varphi}_k = 0$$

avec les $\overline{\varphi}_k$ égaux à des φ_j pour $j > r + \frac{t-r}{2}$ car pour ces k là on a $x_k = \overline{x}_j \notin \mathbb{R}$.
Donc par liberté des φ_k, on obtient

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \lambda_k = 0, \forall k \in \left[\!\!\left[r+1, r+\frac{t-r}{2} \right]\!\!\right], \mu_k - i\mu'_k = 0$$

D'où

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \lambda_k = 0, \forall k \in \left[\!\!\left[r+1, r+\frac{t-r}{2} \right]\!\!\right], \mu_k = \mu'_k = 0$$

Ce qui montre bien la liberté de la famille.
Par conséquent, par unicité de la signature,

$$(p, q) = sign(\sigma_{\mathbb{R}}) = \left(r + \frac{t-r}{2}, \frac{t-r}{2} \right) = \left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2} \right)$$

D'où le nombre de racines réelles distinctes de P est

$$r = p - q$$

$\square$