

**Question de cours.** Énoncer le lemme d'Abel.

**Exercice.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n, a_0 = \alpha \in \mathbb{R}, a_1 = \beta \in \mathbb{R}$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ .

**Exercice.** Soit  $f$  la fonction somme d'une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R = 1$ .

On suppose que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} l \in \mathbb{R}$$

1. On suppose de plus  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ , montrer que  $\sum a_n$  converge de somme égale à  $l$ .
2. Sans cet hypothèse montrer que ce résultat est faux en général.

**Exercice.** On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -1, +\infty[$  par

$$\forall x \in ] -1, +\infty[, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

Déterminer une équation différentielle vérifiée par  $f$  et en déduire le développement en série entière en 0.

*Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*

**Question de cours.** Énoncer la règle de d'Alembert.

**Exercice.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \in \mathbb{R}_+^*$ . Déterminer le rayon de convergence de la série  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ .

**Exercice.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \in \mathbb{R}_+^*$  et de somme  $f(z)$ .

1. Soit  $r \in ]0, R[$ , montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$$

2. En déduire que si  $f$  admet un maximum local en 0, alors  $f$  est une fonction constante.

**Exercice.** On considère  $f$  définie par

$$\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que  $f$  est solution d'une équation différentielle, en déduire le développement en série entière de  $f$  et donner le rayon de convergence.

*Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*

**Question de cours.** Une fonction de classe  $C^\infty$  est-elle développable en série entière ? Si oui donner son développement en série entière au voisinage de 0. Si non connaissez-vous un contre-exemple. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$ .

**Exercice.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , calculer la partie imaginaire de  $\frac{\sin(\theta)e^{i\theta}}{1-x\sin(\theta)e^{i\theta}}$ , en déduire le développement en série entière de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan \left( x - \frac{1}{\tan(\theta)} \right)$$

**Exercice.** On considère, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$f(x) = \int_0^1 t^k \sin(tx) dt$$

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, x f'(x) + (k+1)f(x) = \sin(x)$$

2. Déterminer toutes les fonctions développables en série entière en 0 solutions de

$$xy' + (k+1)y = \sin(x)$$

en précisant le rayon de convergence.

*Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*