Question de cours. Enoncer le théorème de sommation par paquets pour des familles de réels positifs.

Exercice. Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que la famille $(x^{kl})_{k,l\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.
2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}d(n)x^n$$
avec $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a|<1$, montrer que
$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^p}{1-a^p}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et K un corps fini de cardinal q.

1. Calculer le cardinal de $GL_n(K)$.
   Indication : Dénombrer les bases de K^n.
2. En déduire le cardinal de $SL_n(K)$.
3. On considère T l'ensemble des matrices carrés de taille n à coefficients dans K, triangulaires supérieures avec uniquement des 1 sur la diagonale, montrer que T est un sous-groupe de $GL_n(K)$ et calculer son cardinal.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la famille $\left(\frac{1}{a^m+b^n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $a > 1, b > 1$.

Exercice. On dit que $x \in \mathbb{C}$ est algébrique s'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$ et on appelle de degré de x

$$n = inf\,\{deg(P), P \in \mathbb{Z}[X], P(x) = 0\}$$

1. Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les nombres algébriques de degré au plus n forment un ensemble dénombrable.
3. En déduire que les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable.

Exercice. On considère, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, $N(r)$ le nombre de points de $\mathbb{Z}^2$ de norme inférieure ou égale à r.
Montrer que $N(r) \underset{r\to+\infty}{\sim} \pi r^2$ l'aire du disque de rayon r.
Indication : Considérer les carrés $C_x = \left\{t \in \mathbb{R}^2, |t_1 - x_1| \leq \frac{1}{2}, |t_2 - x_2| \leq \frac{1}{2}\right\}$ pour $x \in \mathbb{Z}^n$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et déomontrer le théorème de comparaison pour deux familles sommables positives.

Exercice. Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ bijectif, montrer la divergence de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice. On note $l^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des familles $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ sommables et on définit la norme $\|\cdot\|$ sur $l^1(\mathbb{Z})$ par $\|u\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$.

1. Soit $u, v \in l^1(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la famille $(u_k v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. On définit $(u * v)_n = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u * v \in l^1(\mathbb{Z})$.
3. Montrer que $\|u * v\| \leq \|u\| \, \|v\|$.
4. Montrer que $*$ est une loi associative, commutative et possédant un élément neutre sur $l^1(\mathbb{Z})$.
5. On considère $u \in l^1(\mathbb{Z})$ défini par $u_0 = 1, u_1 = -1, \forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}, u_n = 0$. Montrer que u n'est pas inversible dans $(l^1(\mathbb{Z}), *)$.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer a_n le nombre de manières de recouvrir un damier de dimension $2 \times n$ avec des pièces de dimension 1×2. Indication : aboutir à une relation de récurrence.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche