Question de cours. Enoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

Exercice. On considère une particule qui possède deux états possibles numérotés 1 et 2. Cette particule peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps n. L'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

- Si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- Si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$

On suppose également que $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. On note $\mu_n = (\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2))$. Déterminer $A \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $\mu_{n+1} = \mu_n A$.
3. En déduire la loi de X_n.
4. Montrer que les lois μ_n admettent une limite quand $n \to +\infty$.
5. On considère $T = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = 1\}$. Déterminer $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T = k)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice. On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, ..., n$ de façon équiproblable. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et A_p l'événement "le nombre choisi est divisible par p".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ si $p \mid n$.
2. Soit $p_1, ..., p_k$ des diviseurs premiers distincts de n, montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont indépendants ie : pour tout $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., k\}$,
$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$
3. On considère $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs non nuls inférieurs à n et premiers avec n, montrer que
$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la loi de X est sans mémoire si et seulement si X suit une loi géométrique.

Exercice. Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice.

1. Montrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer la somme.
2. Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$$

   (a) Vérifier que l'égalité précédente définit bien une loi conjointe.
   (b) Montrer que X et Y suivent la même loi.
   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice. On tire au hasard un nombre entier strictement positif N. On suppose que la probabilité d'obtenir $N = n$ est de $\frac{1}{2^n}$.

1. Vérifier que cela définit bien une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et A_k l'événement "N est un mutiple de k". Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.
4. Montrer que pour $p, q \geq 2$, les événements A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p_n = \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle va être la loi limite de X_n quand n tend vers $+\infty$? Le démontrer.

Exercice. Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dont la proportion d'une personne malade est d'1 sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0, 1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Exercice. On considère un gardien de phare avec 10 clés dont une seule ouvre la porte du phare. Il possède deux méthodes pour ouvrir la porte : Méthode A il n'essaye qu'une seule fois chaque clé ; Méthode B ivre, chaque clé peut être essayée plusieurs fois.

1. Soit X_A (respectivement X_B) le nombre aléatoire de clés essayés pour ouvrir la porte par la méthode A (respectiement B).
   Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_A = k)$ et $\mathbb{P}(X_B = k)$.
2. Montrer que la probabilité que le gardien n'ouvre jamais la porte avec la méthode B est nulle.
3. On suppose que le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clés, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité qu'il soit ivre ce jour-là, autrement dit calculer $\mathbb{P}(I \mid X > 8)$ en notant I l'événement "le gardien est ivre" et X le nombre d'essais pour que le gardien ouvre la porte.

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0,1]$, $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$$

2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche