Question de cours. Enoncer et démontrer la formule des probabilités totales.

Réponse. Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements tels que $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ pour tout $i \in I$, et $A \in \mathcal{A}$, alors
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A\cap B_i) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Démonstration. Comme $(B_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements il existe $N \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$ et
$$\Omega\backslash N = \bigsqcup_{i\in I} B_i$$
Ainsi on a la réunion disjointe
$$A = (A\cap N) \sqcup (A \cap (\Omega\backslash N)) = (A\cap N) \sqcup \left(A \cap \bigsqcup_{i\in I} B_i\right) = (A\cap N) \sqcup \left(\bigsqcup_{i\in I}(A\cap B_i)\right)$$
Ainsi, par σ-additivité,
$$\mathbb{P}(A) = 0 + \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A\cap B_i) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i)$$
□

Exercice. On considère une particule qui possède deux états possibles numérotés 1 et 2. Cette particule peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_n égale à l'état de la particule au temps n. L'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :
- Si au temps n la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\frac{1}{2}$
- Si au temps n la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\frac{1}{4}$

On suppose également que $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.
1. Déterminer la loi de X_1.
2. On note $\mu_n = (\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2))$. Déterminer $A \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $\mu_{n+1} = \mu_n A$.
3. En déduire la loi de X_n.
4. Montrer que les lois μ_n admettent une limite quand $n \to +\infty$.
5. On considère $T = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n = 1\}$. Déterminer $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T = k)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Démonstration.
1. La variable aléatoire X_1 est à valeurs dans $\{1,2\}$ et par formule des probabilités totales
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$
Ainsi X_1 est de loi binomiale de paramètre $\frac{5}{8}$.

2. De même on a

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = \mathbb{P}(X_{n+1}=1 \mid X_n=1)\mathbb{P}(X_n=1) + \mathbb{P}(X_{n+1}=1 \mid X_n=2)\mathbb{P}(X_n=2)$$
$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n=2)$$

et

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n=2)$$

D'où

$$\mu_{n+1} = \mu_n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

3. On a donc par récurrence immédiate

$$\mu_n = \mu_0 A^n$$

Or $\chi_A = (X-1)\left(X - \frac{1}{4}\right)$ scindé à racines simples, donc A est diagonalisable de valeurs propres simples 1 et $\frac{1}{4}$.

De plus on a $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{\frac{1}{4}}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Puis

$$\mu_n = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

4. On a par continuité du produit matriciel (bilinéaire en dimension finie)

$$\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \ldots = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

5. On a

$$\mathbb{P}(T=1) = \mathbb{P}(X_1=1, X_0=2) = \mathbb{P}(X_0=2)\mathbb{P}(X_1=1 \mid X_0=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Puis

$$\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(X_k=1, X_{k-1}=2, \ldots, X_0=2)$$
$$= \mathbb{P}\left(X_k=1 \mid X_{k-1}=2, \ldots, X_0=2\right)\mathbb{P}\left(X_{k-1}=2, \ldots, X_0=2\right)$$
$$= \mathbb{P}(X_k=1 \mid X_{k-1}=2)\mathbb{P}(X_{k-1}=2 \mid X_{k-2}=2, \ldots, X_0=2)\mathbb{P}(X_{k-2}=2, \ldots, X_0=2)$$
$$= \ldots = \mathbb{P}(X_k=1 \mid X_{k-1}=2)\mathbb{P}(X_{k-1}=2, X_{k-2}=2)\ldots\mathbb{P}(X_1=2 \mid X_0=2)\mathbb{P}(X_0=2) = \frac{3^{k-1}}{2^{2k+1}}$$

□

Exercice. On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$ de façon équiproblable. Soit $p \in [\![1, n]\!]$ et A_p l'événement "le nombre choisi est divisible par p".

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ si $p \mid n$.
2. Soit $p_1, ..., p_k$ des diviseurs premiers distincts de n, montrer que les événements $A_{p_1}, ..., A_{p_k}$ sont indépendants ie : pour tout $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., k\}$,

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$

3. On considère $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs non nuls inférieurs à n et premiers avec n, montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Démonstration.

1. On considère $\Omega = \{1, ..., n\}$, la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme, ainsi

$$\forall k \in \Omega, \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}$$

On suppose que $p \mid n$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = \alpha p$, alors

$$A_p = \{kp, k \leq \alpha, k \in \mathbb{N}^*\}$$

Donc $|A_p| = \alpha$ et $\mathbb{P}(A_p) = \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p}$.

2. Soit $i_1, ..., i_r \in [\![1, k]\!]$ et $m \in \mathbb{N}$, alors, comme les p_{i_j} sont premiers et distincts, $p_{i_1} \mid m, ..., p_{i_r} \mid m$ si et seulement si $p_{i_1}...p_{i_r} \mid m$.
Donc

$$A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}} = A_{p_{i_1}...p_{i_r}}$$

Ainsi, d'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(A_{p_{i_1}} \cap ... \cap A_{p_{i_r}}) = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}...p_{i_r}}) = \frac{1}{p_{i_1}...p_{i_r}} = \mathbb{P}(A_{p_{i_1}})...\mathbb{P}(A_{p_{i_r}})$$

Donc les A_{p_j} sont indépendants.

3. On considère B_n l'ensemble des diviseurs de n inférieurs à n, alors $|B_n| = \phi(n)$.
Soit $p_1, ..., p_n$ les diviseurs premiers de n, on a alors pour $l \in \mathbb{N}^*$, $l \in B_n$ si et seulement si $l \leq n$ et l n'est pas multiple d'aucun des p_i pour $i \in [\![1, k]\!]$.
Ainsi

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_{p_i}^c$$

Or les A_i sont indépendants, donc les A_i^c également, d'où

$$\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{p_i}^c) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

De plus $\mathbb{P}$ étant uniforme, on a

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{|B_n|}{n} = \frac{\phi(n)}{n}$$

D'où

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$\square$

Question de cours. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que la loi de X est sans mémoire si et seulement si X suit une loi géométrique.

Démonstration.
Sens direct : On suppose que X est sans mémoire :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > m + n \mid X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

ie

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > m + n) = \mathbb{P}(X > m + n, X > m) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X > m)$$

D'où, par récurrence immédiate, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X > 1)^n =: q^n$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n - 1) - \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1 - q)$$

D'où X suit une loi géométrique de paramètre $1 - q = 1 - \mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X \leq 1)$.
Sens indirect : On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre q.
Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X \geq n + 1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1 - p)^{k-1} p = p\frac{(1 - p)^n}{1 - (1 - p)} = (1 - p)^n$$

Puis

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > m + n \mid X > m) = \frac{\mathbb{P}(X > m + n)}{\mathbb{P}(X > m)} = \frac{(1 - p)^{m+n}}{(1 - p)^m} = (1 - p)^n = \mathbb{P}(X > n)$$

D'où X est sans mémoire. □

Exercice. Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Démonstration.

1. On note A_i l'événement "la première erreur n'est pas corrigée par le i-ième relecteur". Alors $\mathbb{P}(A_i) = \frac{2}{3}$, puis, par indépendance et identique distribution, la probabiilité que la première erreur ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture est

$$\mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)...\mathbb{P}(A_n) = \frac{2^n}{3^n}$$

2. On note B_j l'événement "la j-ième erreur n'est pas corrigée après la n-ième relecture". Alors, d'après ce qui précède, $\mathbb{P}(B_j) = \frac{2^n}{3^n}$. Puis la probabilité que le livre soit entièrement corrigé après la n-ième relecture est, par indépendance,

$$p(n) := \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{4} B_j^c\right) = \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)^4$$

Ainsi $p(n) \geq 0,9$ si et seulement si $n \geq \frac{\ln\left(1-(0,9)^{\frac{1}{4}}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

$\square$

Exercice.

1. Montrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer la somme.
2. Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}$$

   (a) Vérifier que l'égalité précédente définit bien une loi conjointe.

   (b) Montrer que X et Y suivent la même loi.

   (c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

1. Soit $i \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \frac{i}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^{i+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j-1}} = \frac{i}{2^i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{i+1}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{i+1}{2^{i-1}}$$

   Puis

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{2^{i-1}} + 2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} + 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

   On a donc une famille sommable de somme $8 = 2^3$.

2. (a) On a bien d'après ce qui précède

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1$$

   (b) Soit $i \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{2^{i+j+3}} = \mathbb{P}(Y = i)$$

   Donc X et Y ont la même loi donné par

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{i+1}{2^{i+2}}$$

(c) On a

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0$$

Mais

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{4} \neq 0$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

$\square$

Exercice. On tire au hasard un nombre entier strictement positif N. On suppose que la probabilité d'obtenir $N = n$ est de $\frac{1}{2^n}$.

1. Vérifier que cela définit bien une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et A_k l'événement "N est un mutiple de k". Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3)$.
4. Montrer que pour $p, q \geq 2$, les événements A_p et A_q ne sont pas indépendants.

Démonstration.

1. On a bien
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$
2. On a $A_k = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}^*} \{N = mk\}$, donc
$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{m=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{mk\}) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{mk}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^k}} - 1 = \frac{2^k}{2^k - 1} - 1 = \frac{1}{2^k - 1}$$
3. On a
$$\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_6) = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{2^3 - 1} - \frac{1}{2^6 - 1}$$
4. On note m le PPCM entre p et q. Alors $A_p \cap A_q = A_m$ et si A_p et A_q étaient indépendants on aurait
$$\frac{1}{2^m - 1} = \mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}(A_p) \cap \mathbb{P}(A_q) = \frac{1}{2^p - 1} \frac{1}{2^q - 1}$$
ie
$$2^m = (2^p - 1)(2^q - 1) + 1 = 2^{p+q} - 2^p - 2^q + 2$$
Or $p, q \geq 2$, donc $m \geq 2$, d'où $4 \mid 2$ ce qui n'est pas. Par conséquent A_p et A_q sont indépendants.

$\square$

Question de cours. Soit X_n une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p_n = \frac{\lambda}{n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Quelle va être la loi limite de X_n quand n tend vers $+\infty$? Le démontrer.

Réponse. Pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\underset{n \to +\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(Z = k)$$

avec Z une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, k \in [\![0, n]\!]$$

On peut donc caluler

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n^k \left(1 - \frac{1}{n}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k}$$

Or

$$(1-p_n)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = exp\left(nlog\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} exp(-\lambda)$$

et

$$(1-p_n)^{-k} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

□

Exercice. Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dont la proportion d'une personne malade est d'1 sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0, 1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test ?

Démonstration. Pour un personne donnée on note M l'événement "la personne est malade" et T "le résultat est positif. On a alors d'après l'énoncé

$$\mathbb{P}(M) = 10^{-4}, \mathbb{P}(T \mid M) = 0,99, \mathbb{P}(T \mid M^c) = 10^{-4}$$

Mais la probabilité qu'une personne soit malade alors que son test est positif est

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T \mid M^c)\mathbb{P}(M^c)} = \frac{0,99 \times 10^{-4}}{0,99 \times 10^{-4} + 10^{-3} \times (1 - 10^{-4})}$$

D'où

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{0,99}{0,99 + 10 \times 0,9999} = \frac{0,11}{0,11 + 1,111} = \frac{0,11}{1,221} = \frac{110}{1221} \simeq 0,1$$

Par conséquent si une personne a un test positif alors elle a une probabilité de $\frac{9}{10}$ de ne pas être malade. Le test est donc mauvais et ne doit pas être commercialisé. □

Exercice. On considère un gardien de phare avec 10 clés dont une seule ouvre la porte du phare. Il possède deux méthodes pour ouvrir la porte : Méthode A il n'essaye qu'une seule fois chaque clé ; Méthode B ivre, chaque clé peut être essayée plusieurs fois.

1. Soit X_A (respectivement X_B) le nombre aléatoire de clés essayés pour ouvrir la porte par la méthode A (respectiement B).
   Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_A = k)$ et $\mathbb{P}(X_B = k)$.
2. Montrer que la probabilité que le gardien n'ouvre jamais la porte avec la méthode B est nulle.
3. On suppose que le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour, après avoir essayé 8 clés, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité qu'il soit ivre ce jour-là, autrement dit calculer $\mathbb{P}(I \mid X > 8)$ en notant I l'événement "le gardien est ivre" et X le nombre d'essais pour que le gardien ouvre la porte.

Démonstration.

1. Pour la méthode B on reconnaît un processus de Bernoulli et on étudie l'instant de premier succès, ainsi X_B suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{10}$.
   Puis X_A est à valeurs dans $[\![1, 10]\!]$, soit $k \in [\![\mathbb{N}$, on note C_i l'événement "la bonne clé a été trouvé au i-ième tirage".
   Ainsi par formule des probabilités composées
   $$\mathbb{P}(X_A = k) = \mathbb{P}(C_k \cap C_{k-1}^c \cap ... \cap C_1^c) = \mathbb{P}(C_1^c)\mathbb{P}(C_2^c \mid C_1^c)...\mathbb{P}(C_k \mid C_1^c \cap ... \cap C_{k-1}^c)$$
   $$= \frac{9}{10}\frac{8}{9}...\frac{10-(k-1)}{10-(k-2)}\frac{1}{10-(k-1)} = \frac{1}{10}$$
   Ainsi X_A suit la loi uniforme sur $[\![1, 10]\!]$.
2. On note D l'événément que le gardien n'ouvre jamais la porte. Alors
   $$D = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_B \geq n\}$$
   intersection dénombrable d'événements croissants.
   Ainsi
   $$\mathbb{P}(D) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_B \geq n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{10}\right)^n = 0$$
3. On a
   $$\mathbb{P}(I \mid X > 8) = \frac{\mathbb{P}(I, X > 8)}{\mathbb{P}(X > 8)} = \frac{\mathbb{P}(X > 8 \mid I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(X > 8 \mid I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(X > 8 \mid I^c)\mathbb{P}(I^c)}$$
   $$= \frac{\mathbb{P}(X_B > 8)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(X_B > 8)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(X_A > 8)\mathbb{P}(I^c)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{10}\right)^9 \frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{10}\right)^9 \frac{1}{3} + \frac{2}{10}\frac{2}{3}} = \frac{\frac{9^9}{10^9}}{\frac{9^9}{10^9} + \frac{4}{10}}$$

$\square$

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et le n-ième polynôme de Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Soit $x \in [0,1]$, $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires de loi de Bernouilli de paramètre x et $S_n = X_1 + ... + X_n$, quelle est la loi de S_n ? En déduire que

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$$

2. Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. Montrer que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Démonstration.

1. La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètre n, x.
Ainsi, par lemme de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

2. On a par inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \mathbb{P}(|S_n - nx| > n\delta) = \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > n\delta) \leq \frac{Var(S_n)}{n^2\delta^2}$$

Or $S_n \sim B(n,x)$, donc

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

3. La fonction f est continue sur $[0,1]$ compact, donc par théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1$.
Donc, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ainsi pour $x \in [0,1]$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$|B_n(f)(x)-f(x)| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leq\alpha\right\}}\right)+\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right\}}\right)$$

Ainsi, avec ce qui précède,

$$|B_n(f)(x)-f(x)| \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right) \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty + \frac{\left\|f\right\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Ainsi

$$\left\|B_n(f)-f\right\|_\infty \leq \varepsilon + 2\left\|f\right\|_\infty + \frac{\left\|f\right\|_\infty}{2n\delta^2}$$

Or $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ pour $n \geq N$.
Donc, pour $n \geq N$,

$$\left\|B_n(f)-f\right\|_\infty \leq 2\varepsilon$$

Ce qui montre que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

$\square$