

**Question de cours.** Énoncer la définition de la densité et sa caractérisation séquentielle.

**Exercice.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Que peut-on dire de l'intérieur  $\overset{\circ}{F}$  de  $F$  ?

**Exercice.** Soit  $E$  un espace métrique.

1. Soit  $A$  un ouvert de  $E$  et  $B \subset E$ . Montrer que  $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ .
2. Soit  $A \subset E$ . On dit que  $A$  est localement fermé dans  $E$  si pour tout  $x \in A$ , il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  dans  $E$  tel que  $V_x \cap A$  fermé dans  $V_x$ .
  - (a) On suppose que  $A$  est localement fermé. Montrer que pour tout  $x \in E$ , il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $E$  tel que  $U_x \cap A$  soit fermé dans  $U_x$ .
  - (b) Montrer que  $A$  est localement fermé si et seulement si  $A$  est l'intersection d'un ouvert de  $E$  et d'un fermé de  $E$ .

**Exercice.** Soit  $H$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ .

1. Montrer que  $\{x \in H, x > 0\}$  est minoré. On notera alors  $m = \inf\{x \in H, x > 0\}$ .
2. On suppose  $m > 0$ . Montrer que  $H = m\mathbb{Z}$ .
3. On suppose  $m = 0$ . Montrer que  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

*Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*

**Question de cours.** Énoncer le théorème de Weierstrass.

**Exercice.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence de la boule unité ouverte coïncide avec la boule unité fermée.

**Exercice.** Pour  $x, y \in \mathbb{R}$ , on note  $(x, y)$  le segment  $[\min(x, y), \max(x, y)]$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . On définit la relation  $R$  sur  $U$  par

$$\forall x, y \in U, xRy \iff (x, y) \subset U$$

1. Montrer que  $R$  définit une relation d'équivalence.
2. Soit  $x \in U$ , on note  $C(x)$  la classe d'équivalence de  $x$  pour la relation  $R$ . Montrer que  $C(x)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $C(x)$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .
4. En déduire que  $U$  se décompose en une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

**Exercice.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $A, B$  deux parties de  $E$ . On note

$$A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si  $A$  est ouvert alors  $A + B$  est ouvert.
2. Montrer que si  $A$  est compact et  $B$  fermé alors  $A + B$  fermé.

*Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*

**Question de cours.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $(O_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts de  $E$  et  $(F_j)_{j \in J}$  une famille de fermés de  $E$ . Que peut-on dire de  $\bigcup_{i \in I} O_i$ ,  $\bigcap_{i \in I} O_i$ ,  $\bigcup_{j \in J} F_j$  et  $\bigcap_{j \in J} F_j$  ?

**Exercice.** Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infini

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

1. Montrer que l'ensemble  $A$  des suites croissantes est un fermé de  $E$ .
2. Montrer que l'ensemble  $B$  des suites convergeantes vers 0 est un fermé de  $E$ .

**Exercice.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $A$  une partie non vide et bornée de  $E$ . On peut donc considérer

$$\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$$

1. Montrer que  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\overline{A}$  et  $Fr(A)$  sont également bornés dans  $E$ .
2. Comparer  $\text{diam}(\overset{\circ}{A})$ ,  $\text{diam}(\overline{A})$  et  $\text{diam}(A)$ .
3. (a) Soit  $x \in A$  et  $u \in E \setminus \{0\}$ . Montrer que  $\sup\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$  existe.  
 (b) En déduire que toute demi-droite issue de  $x \in A$  coupe  $Fr(A)$ .  
 (c) Montrer que  $\text{diam}(Fr(A)) = \text{diam}(A)$ .

*Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*