Question de cours. Enoncer la définition de la densité et sa caractérisation séquentielle.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Que peut-on dire de l'intérieur $\overset{\circ}{F}$ de F ?

Exercice. Soit E un espace vectoriel et A, B deux parties de E. On note

$$A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si A est ouvert alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ fermé.

Exercice. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \longrightarrow E$ tel que

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in E$ et que pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, vérifie

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème de Weierstrass.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence de la boule unité ouverte coïncide avec la boule unité fermée.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

Exercice. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note (x, y) le segment $[\min(x, y), \max(x, y)]$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit la relation R sur U par

$$\forall x, y \in U, xRy \iff (x, y) \subset U$$

1. Montrer que R définit une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation R. Montrer que $C(x)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
4. En déduire que U se décompose en une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Que peut-on dire de l'image directe et de l'image réciproque d'une partie compacte par une application continue ?

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infini

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

1. Montrer que l'ensemble A des suites croissantes est un fermé de E. Est-ce un compact de E ?
2. Montrer que l'ensemble B des suites convergeantes vers 0 est un fermé de E. Est-ce un compact de E ?

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E. On peut donc considérer

$$diam(A) := \sup_{x,y\in A} \|x-y\|$$

1. Montrer que $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$ et $Fr(A)$ sont également bornés dans E.
2. Comparer $diam(\overset{\circ}{A}), diam\left(\overline{A}\right)$ et $diam(A)$.
3. (a) Soit $x \in A$ et $u \in E\backslash\{0\}$. Montrer que $\sup\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ existe.
   (b) En déduire que toute demi-droite issue de $x \in A$ coupe $Fr(A)$.
   (c) Montrer que $diam(Fr(A)) = diam(A)$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche