Question de cours. Enoncer la définition de la densité et sa caractérisation séquentielle.

Réponse. Soit E un esppace vectoriel normé et D une partie de E. Alors on dit que D est dense dans E si son adhérence (pour la norme de E) coïncide avec E. De plus les assertions suivantes sont équivalentes :

1. D est dense dans E,
2. Pour tout $x \in E$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ tel que $\|x - x_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Que peut-on dire de l'intérieur $\mathring{F}$ de F ?

Démonstration. Si $F = E$ alors $\mathring{F} = E$. Sinon $F \neq E$. On suppose que $\mathring{F} \neq \varnothing$. Alors il existe $x \in F$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$B(x, r) \subset F$$

Ainsi, comme F est un sous-espace vectoriel

$$B(0, r) = B(x, r) - x \subset F$$

Puis

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(0, nr) \subset F$$

Ce qui contredit $F \neq E$. Par conséquent $\mathring{F} = \varnothing$. □

Exercice. Soit E un espace vectoriel et A, B deux parties de E. On note

$$A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$$

1. Montrer que si A est ouvert alors $A + B$ est ouvert.
2. Montrer que si A est compact et B fermé alors $A + B$ fermé.

Démonstration.

1. On suppose que est ouvert. Alors

   $$A + B = \bigcup_{y\in B} (A + \{y\})$$

   avec $A + \{y\} = f_y^{-1}(A)$ ouvert de E comme image réciproque de A ouvert par l'application continue $f_y : x \in A \longmapsto x + y$. Ainsi $A + B$ est ouvert.
2. On suppose que A est compact et B fermé. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (A + B)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $z \in E$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$.
   Or A est compact, donc il existe une extractrice φ et $x \in A$ tel que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
   Ainsi $y_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z - x$, d'où, comme B est fermé, $z - x \in B$, i.e. $z \in A + B$.
   Donc, par caractérisation séquentielle des fermés, $A + B$ est fermé.

$\square$

Exercice. Soit (E, d) un espace métrique compact et $f : E \longrightarrow E$ tel que

$$\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Montrer que f admet un unique point fixe $\alpha \in E$ et que pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, vérifie

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Démonstration. L'unicité du point fixe vient directement de la propriété vérifiée par f.
Pour l'existence on a $x \in E \longmapsto d(x, f(x)) \in \mathbb{R}$ continue par continuité de f (car 1-lipsctzienne), donc, par théorème des bornes atteintes, il existe $\alpha \in E$ tel que

$$d(\alpha, f(\alpha)) = \underset{x\in E}{inf} d(x, f(x))$$

Si $\alpha \neq f(\alpha)$ alors

$$d(f(\alpha), f(f(\alpha)) < d(\alpha, f(\alpha))$$

ce qui contredit la minimalité de $d(\alpha, f(\alpha))$, d'où $\alpha = f(\alpha)$.
Puis on considère $u_n = d(\alpha, x_n)$.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = \alpha$ alors $x_n = \alpha$ pour tout $n \geq n_0$ et le résultat est démontré.
Sinon

$$\forall n \in N, u_{n+1} = d(\alpha, x_{n+1}) d(f(\alpha), f(x_n)) < d(\alpha, x_n) = u_n$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît strictement, et est minorée par 0, donc converge vers une limite $l \in \mathbb{R}_+$.
Si $l > 0$ alors $u_n \geq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or E est compact, donc il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\beta \in E$ tel que

$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$$

Ainsi

$$l = \underset{n\to+\infty}{lim} d(\alpha, x_{\varphi(n)}) = d(\alpha, \beta)$$

Puis, par continuité de f,

$$d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(\alpha, f(\beta))$$

ce qui est absurde car

$$d(\alpha, f(\beta)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = l$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = u_{\varphi(n)+1} \geq l$$

Par conséquent $l = 0$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. $\square$

Question de cours. Enoncer le théorème de Weierstrass.

Réponse. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, alors les fonctions polynomiales forment une partie dense de $C^0([a,b],\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence de la boule unité ouverte coïncide avec la boule unité fermée.

Démonstration. On considère $B_f(0,1)$ la boule unitée fermée de E. Alors $B_f(0,1)$ est fermée dans E comme image réciproque du fermé $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $\|\cdot\|$. Ainsi, comme $\overline{B(0,1)}$ est le plus petit fermé contenant $B(0,1)$, on a

$$\overline{B(0,1)} \subset B_f(0,1).$$

Réciproquement soit $x \in B_f(0,1)$. Si $\|x\| < 1$ alors $x \in B(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$. Sinon $\|x\| = 1$. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right) x \in B(0,1)$. Ainsi $\|x_n - x\| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $x \in \overline{B(0,1)}$. Par conséquent

$$B_f(0,1) \subset \overline{B(0,1)}.$$

□

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?

Démonstration.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{K}^n$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   Ainsi

   $$\forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \|u_m - l\| + \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

   D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. Réciproquement on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : Soit $n \in \mathbb{N}$. Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

   $$n \geq N \Rightarrow \forall m \geq N, \|u_m - u_n\| \leq 1$$

   Donc

   $$n \geq N \Rightarrow \|u_n\| \leq \|u_N\| + \|u_N - u_n\| \leq \|u_N\| + 1$$

   Par conséquent

   $$\|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, ..., \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1)$$

Donc, d'après le théorème de Bolzanno-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} l$$

Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall m, n \geq N, \|u_m - u_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par conséquent, comme φ est croissante,

$$\forall n \geq N, \|u_n - l\| \leq \left\|u_n - u_{\varphi(n)}\right\| + \left\|u_{\varphi(n)} - l\right\| \leq \varepsilon$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$.

Le résultat n'est plus vrai sur $\mathbb{Q}$ car par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ car convergente dans $\mathbb{R}$ vers e mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. □

Exercice. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note (x, y) le segment $[\min(x, y), \max(x, y)]$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit la relation R sur U par

$$\forall x, y \in U, xRy \Longleftrightarrow (x, y) \subset U$$

1. Montrer que R définit une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation R. Montrer que $C(x)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
4. En déduire que U se décompose en une réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Démonstration.

1. La relation est réflexive et symétrique.
   Soit $x, y, z \in U$ tels que xRy et yRz. Alors

   $$(x, y), (y, z) \subset U$$

   Ainsi

   $$(x, z) \subset (x, y) \cup (y, z) \subset U$$

   Donc la relation est transitive.
   Par conséquent R définit une relation d'équivalence.
2. Soit $a, b \in C(x)$. Donc

   $$(a, x), (b, x) \subset U$$

   Soit $y \in (a, b)$, alors

   $$(a, y) \subset (a, b) \subset (a, x) \cup (b, x) \subset U$$

   Donc

   $$(x, y) \subset (a, y) \cup (a, x) \subset U$$

   D'où $y \in C(x)$, ce qui montre que $(a, b) \subset C(x)$, i.e. que $C(x)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

3. On suppose $C(x)$ borné. On note alors $y = \sup(C(x)$. Si $y \in C(x)$ alors

$$(x, y) = [x, y] \subset U$$

Or U est ouvert, donc il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$[x, y + \varepsilon] \subset U$$

Ainsi $y + \varepsilon \in C(x)$ ce qui contredit la définition de y. Donc $y \notin C(x)$. De même on a $\inf(C(x)) \notin C(x)$. Par conséquent, comme $C(x)$ est un intervalle,

$$C(x) =]\inf(C(x)), \sup(C(x))[$$

On suppose $C(x)$ minorée et non majorée. Alors, d'après la question précédente, $C(x)$ est de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ avec $a = \inf(C(x))$. Comme précédement, on a nécessairement $a \notin C(x)$, d'où

$$C(x) =]a, +\infty$$

De même si $C(x)$ est majorée et non minorée.
On suppose $C(x)$ non majorée et non minorée. Alors, d'après la question précédente,

$$C(x) =] - \infty, +\infty[$$

Dans tous les cas, $C(x)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

4. Comme R est une relation d'équivalence,

$$U = \bigsqcup_{x \in U} C(x)$$

avec, d'après la question précédente, $C(x)$ intervalle ouvert pour tout $x \in U$.
De plus $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{Q} \cap U$ est dense dans U. On a premièrement

$$\bigsqcup_{x \in \mathbb{Q} \cap U} C(x) \subset U$$

Réciproquement soit $y \in U$. Alors il existe $x \in U$ tel que

$$y \in C(x) =]a, b[$$

avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit $\varepsilon = \min(x - a, x - b)$ et $x_\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap U$ tel que $|x - x_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Alors $x_\varepsilon \in]a, b[= C(x)$, d'où

$$(y, x_\varepsilon) \subset (y, x) \cup (x, x_\varepsilon) \subset U$$

Ainsi

$$y \in C(x_\varepsilon)$$

, ce qui montre que

$$U = \bigsqcup_{x \in \mathbb{Q} \cap U} C(x)$$

$\square$

Question de cours. Que peut-on dire de l'image directe et de l'image réciproque d'une partie compacte par une application continue ?

Réponse. Soit E, F deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ et C un compact de E. Alors $f(C)$ est un compact de F. Cependant ce n'est plus vrai pour l'image réciproque. On peut par exemple considérer $E = F = \mathbb{R}$ et $f \equiv 0$, alors $f^{-1}([-1,1]) = \mathbb{R}$ n'est pas compacte car non borné.

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme infini

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

1. Montrer que l'ensemble A des suites croissantes est un fermé de E. Est-ce un compact de E ?
2. Montrer que l'ensemble B des suites convergeantes vers 0 est un fermé de E. Est-ce un compact de E ?

Démonstration.

1. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $u_\infty \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Or

   $$|u_{\infty,n} - u_{k,n}| \leq \|u_\infty - u_k\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   Donc, par croissance des u_k,

   $$u_{\infty,n} = \lim_{k\to+\infty} u_{k,n} \leq \lim_{k\to+\infty} u_{k,n+1} = u_{\infty,n+1}$$

   D'où $u_\infty \in A$.
   Par conséquent, par caractérisation séquentielle des fermés, A est un fermé de E.
   De plus A n'est pas compact dans E car non bornée. En effet on peut considérer, pour $k \in \mathbb{N}$, u_k une suite croissante de limite k, d'où $\|u_k\|_\infty = k$.
2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $u_\infty \in B$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\|u_k - u\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   Or $u_k \in B$, donc il existe $N = N_k \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geq N, |u_{k,n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   Ainsi

   $$\forall n \geq N, |u_{\infty,n}| \leq |u_{\infty,n} - u_{k,n}| + |u_{k,n}| \leq \|u_\infty - u_k\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

   D'où $u\infty \in B$.
   Par conséquent, par caractérisation séquentielle des fermés, B est un fermé de E.
   De plus B n'est pas compact dans E car non bornée. En effet on peut considérer, pour $k \in \mathbb{N}$, u_k une suite décroissante convergeant vers 0 et de premier terme k, d'où $\|u_k\|_\infty = k$.

$\square$

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé et A une partie non vide et bornée de E. On peut donc considérer

$$diam(A) := \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$$

1. Montrer que $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$ et $Fr(A)$ sont également bornés dans E.
2. Comparer $diam(\overset{\circ}{A}), diam\left(\overline{A}\right)$ et $diam(A)$.
3. (a) Soit $x \in A$ et $u \in E \backslash \{0\}$. Montrer que $\sup\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ existe.
   (b) En déduire que toute demi-droite issue de $x \in A$ coupe $Fr(A)$.
   (c) Montrer que $diam(Fr(A)) = diam(A)$.

Démonstration.

1. Comme A est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$. Soit $x \in \overline{A}$, alors, par caractérisation séquentielle, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
   Ainsi
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq M$$
   Puis, par continuité de la norme et passage à la limite, $\|x\| \leq M$, ce qui montre que $\overline{A}$ est bornée.
   Puis $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $Fr(A) \subset \overline{A}$, donc $\overset{\circ}{A}$ et $Fr(A)$ sont également bornées.
2. Par inclusion on a
   $$diam(\overset{\circ}{A}) \leq diam(A) \leq diam(\overline{A})$$
   La première inégalité n'est pas une égalité. En effet si on considère $A = [1, 2] \cup \{3\}$ dans $E = \mathbb{R}$ alors
   $$diam(\overset{\circ}{A}) = 1 < 2 = diam(A)$$
   Par contre la seconde inégalité est une égalité. En effet, soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, par définition de la borne supérieure, il existe $x, y \in \overline{A}$ tels que
   $$\|x - y\| \geq diam(\overline{A}) - \varepsilon$$
   Or, par définition de l'adhérence, il existe $x', y' \in A$ tels que
   $$\|x - x'\| \leq \varepsilon, \|y - y'\| \leq \varepsilon$$
   Ainsi
   $$\|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y'\| + \|y' - y\| \leq 2\varepsilon + \|x' - y'\|$$
   D'où
   $$\|x' - y'\| \geq \|x - y\| - 2\varepsilon \geq diam(\overline{A}) - 3\varepsilon$$
   Donc $diam(A) \geq diam(\overline{A})$ ce qui montre l'égalité.

3. (a) Comme A est borné, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $x + tu \in A$. Alors

$$\|x + tu\| \leq M$$

Ainsi

$$\|tu\| \leq \|x + tu\| + \|x\| \leq 2M$$

D'où $t \leq \frac{2M}{\|u\|}$, ce qui montre que $\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ est majoré.

(b) Soit $\{x + tu, t \in \mathbb{R}_+\}$ une demi-droite issue de $x \in A$ avec $u \in E \backslash \{0\}$.
D'après la question précédente, on peut considérer

$$t_0 = \sup\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors, par définition de la borne supérieure de $\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$, il existe $t_n \in \{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ tel que $t_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} t_0$. Puis, en notant $x_n := x + t_n u \in A$, on a

$$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x + tu$$

D'où $x + tu \in \overline{A}$.
De plus si $x + t_0 u \in \overset{\circ}{A}$ alors il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$B(x + t_0 u, r) \subset A$$

Or la demi-droite $\{x + tu, t \geq t_0\}$ intersecte $B(x + t_0 u, r) \backslash \{x + t_0 u\}$, donc il existe $t_1 > t_0$ tel que

$$x + t_1 u \in B(x + t_0 u, r) \subset A$$

ce qui contredit la définition de t_0. Par conséquent $x + t_0 u \notin \overset{\circ}{A}$ puis

$$x + t_0 u \in Fr(A)$$

On a donc montré que la demi-droite $\{t \in \mathbb{R}_+, x + tu \in A\}$ intersecte $Fr(A)$.

(c) On a premièrement $diam(Fr(A)) \leq diam(\overline{A}) = diam(A)$.
Réciproquement soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $x, y \in A$ tels que

$$\|x - y\| \geq diam(A) - \varepsilon$$

On considère $u = y - x$, ainsi, d'après la question précédente, il existe

$$z = x + t_0 u \in Fr(A)$$

De même pour $u' = x - y$, il existe

$$z' = x + t_0' u' \in Fr(A)$$

En particulier $t_0 \geq 1$ car $x + u = x \in A$, donc $t_0 + t_0' \geq 1$.
Ainsi

$$\|z - z'\| = \|t_0 u - t_0' u'\| = (t_0 + t_0') \|x - y\| \geq \|x - y\| \geq diam(A) - \varepsilon$$

D'où

$$diam(Fr(A)) \geq diam(A) - \varepsilon$$

Puis

$$diam(Fr(A)) \geq diam(A)$$

ce qui montre l'égalité.

$\square$