Question de cours. Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Quelles relations a-t-on entre F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Exercice. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Le but de l'exercice est de montrer que l'application suivante définie un produit scalaire :

$$f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{array}.$$

1. Soit $x, y \in E$. Montrer que $f(2x, y) = 2f(x, y)$.
2. Soit $x_1, x_2, y \in E$. Montrer que $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$.
3. En déduire que $f(nx, y) = nf(x, y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. Conclure que f définit un produit scalaire sur E.

Exercice. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t\ln(t) - a - bt\right)^2 dt$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.

Exercice. On considère $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $f, g \in E$,

$$\phi(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ définisse un produit scalaire sur E.

Exercice. Soit $w : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue et $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt.$$

1. Montrer qu'il existe une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ formée de vecteurs deux à deux orthogonaux de dégré n et unitaires.
2. Soit $n \geq 2$. Montrer que $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}.$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer l'égalité de Parseval-Bessel.

Exercice. Soit $p, n \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n = M_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. On considère $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique $X_0 \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que
$$\|AX_0 - B\| = \inf_{X \in M_{p,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|.$$
2. Montrer que X_0 est l'unique solution de l'équation
$${}^tAAX = {}^tAB$$
d'inconnue $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$.
3. En déduire
$$\inf_{x,y \in \mathbb{R}} \left((x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2\right).$$

Exercice. On considère $E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par
$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$
On considère également le sous-espace vectoriel $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche