Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème spectral.

Exercice. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Le but de l'exercice est de montrer que l'application suivante définie un produit scalaire :

$$f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{array}.$$

1. Soit $x, y \in E$. Montrer que $f(2x, y) = 2f(x, y)$.
2. Soit $x_1, x_2, y \in E$. Montrer que $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$.
3. En déduire que $f(nx, y) = nf(x, y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. Conclure que f définit un produit scalaire sur E.

Exercice. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t\ln(t) - a - bt\right)^2 dt$.

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.

Exercice. On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $f, g \in E$,

$$\phi(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ définisse un produit scalaire sur E.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de montrer que l'application $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, i.e. une application continue bijective de bijection réciproque continue.

1. Montrer que $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$. On rappelle que

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ {}^t XAX > 0\}.$$

2. Montrer la continuité de exp sur $M_n(\mathbb{R})$. En déduire la continuité de exp sur $S_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer la surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soit $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tels que $exp(A) = exp(A')$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = Q(exp(A'))$. En déduire que A et A' sont co-orthodiagonalisables, i.e. orthodiagonalisable dans la même base orthonormée, puis que $A = A'$.
5. On considère $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in (Im(exp))^{\mathbb{N}} = (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que

$$B_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B = exp(A) \in Im(exp) = S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$. On pourra utiliser le résultat suivant :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \|S\|_2 = max(Sp(S)) =: \rho(S) \text{ appelé rayon spectral.}$$

   (b) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur propre.

   En déduire que $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue.

Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques.

Exercice. Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = id_E$. Montrer que $u^2 = id_E$.

Exercice. On considère $E = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

On considère également le sous-espace vectoriel $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.

Exercice. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension n et $u \in L(E)$ symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.