**Question de cours.** Enoncer et démontrer la caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques.

**Exercice.** Soit $E$ un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension $n$ et $u$ un endomorphisme symétrique de $E$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = id_E$. Montrer que $u^2 = id_E$.

**Exercice.** Soit $E$ un espace préhilbertien réel de dimension $n$ et $u \in L(E)$ symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ a tous ses coefficients diagonaux nuls.

**Exercice.** Soit $M$ une matrice symétrique d'ordre $n$ dont tous les coefficients sont positifs.

1. Montrer que l'on peut définir
$$\alpha = \sup\{\langle X, MX\rangle, X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\}$$
et qu'il s'agit une valeur propre de $M$.
2. Montrer que $M$ admet un vecteur propre à coordonnées toutes positives et associé à une valeur propre positive.

**Question de cours.** Enoncer et démontrer le théorème spectral.

**Exercice.** Soit $A$ une matrice réelle symétrique de taille $n$ positive i.e.

$$\forall z \in \mathbb{R}^n, \langle Az, z\rangle \geq 0.$$

On considère l'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ définie par

$$g(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle \right)$$

1. Montrer que si $A$ est inversible alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $g(y)$ appartient à $\mathbb{R}$ et est égal à $\frac{1}{2}\langle A^{-1}y, y\rangle$.
   Indication : On pourra calculer $\langle A^{-1}(y - Ax), y - Ax\rangle$.
2. Dans le cas général, montrer qu'on a

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\langle x_0, y\rangle & \text{où } Ax_0 = y, \text{ si } y \in \mathrm{Im}(A) \\ +\infty & \text{si } y \notin \mathrm{Im}(A) \end{cases}$$

**Exercice.**
1. Soit $A$ une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont positives et $k$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que $A$ et $A^k$ admettent les mêmes sous-espaces propres.
2. Soient $A$ et $B$ deux matrices symétriques positives tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = B^k$. Montrer que $A = B$.

**Question de cours.** Enoncer le théorème de réduction des isométries vectorielles.

**Exercice.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de montrer que l'application

$$exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$$

est un homéomorphisme, i.e. une application continue bijective de bijection réciproque continue.

1. Montrer que $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$. On rappelle que

$$S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in S_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ {}^tXAX > 0\}.$$

2. Montrer la continuité de $exp$ sur $M_n(\mathbb{R})$. En déduire la continuité de $exp$ sur $S_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer la surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Soit $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tels que $exp(A) = exp(A')$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = Q(exp(A'))$. En déduire que $A$ et $A'$ sont co-orthodiagonalisables, i.e. orthodiagonalisable dans la même base orthonormée, puis que $A = A'$.
5. On considère $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in (Im(exp))^{\mathbb{N}} = (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que

$$B_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B = exp(A) \in Im(exp) = S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

   (a) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$. On pourra utiliser le résultat suivant :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \|S\|_2 = max(Sp(S)) =: \rho(S) \text{ appelé rayon spectral.}$$

   (b) Montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence.

   En déduire que $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue.

**Exercice supplémentaire**

**Exercice.** On dit qu'une matrice symétrique $A$ est définie positive si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ et $\langle Ax, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$. Notons $E$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille $n$. Soit $A = (a_{ij}) \in E$.

1. Montrer que pour tous $\gamma_1, \dots \gamma_n$ dans $\mathbb{R}^*$, on a $B = (\gamma_i \gamma_j a_{ij}) \in E$.
2. Montrer que $(\det(A))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(A)$ et en déduire
$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$
3. Soit $C \in E$ tel que $\det(C) = 1$. Montrer qu'on a
$$(\det(A))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(AC)$$
Quels sont les $C$ pour lesquels il y a égalité ?
4. Montrer enfin
$$(\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(A))^{\frac{1}{n}} \leq (\det(A + C))^{\frac{1}{n}}$$
pour tout $C \in E$.