Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème spectral.

Exercice. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Montrer que l'application suivante définie un produit scalaire sur E :

$$f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{array}.$$

<u>Indication</u> : On pourra montrer $f(2x,y) = 2f(x,y)$ puis $f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y) + f(x_2,y)$ pour tout $x, x_1, x_2, y \in E$.

Exercice. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t\ln(t) - a - bt)^2\, dt$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.

Exercice. On considère $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $f, g \in E$,

$$\phi(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ définisse un produit scalaire sur E.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, i.e. une application continue bijective de bijection réciproque continue.
<u>Indications</u> : Pour l'injectivité on pourra utiliser le résultat suivant : Si A et A' sont deux matrices symétriques commutantes alors A et A' sont co-orthodiagonalisables.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques.

Exercice. Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = id_E$. Montrer que $u^2 = id_E$.

Exercice. On considère $E = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

On considère également le sous-espace vectoriel $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Déterminer $F^{\perp}$.

Exercice. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension n et $u \in L(E)$ symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche