Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème spectral.

Réponse. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$ symétrique. Alors u est diagonalisable dans une base orthonormale.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$ le résultat est clair. On suppose le résultat vrai dans les espaces de dimension $n-1$. Comme u est symétrique il admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet son polynôme caractéristique admet une racine $\lambda \in \mathbb{C}$, donc, si on note A la matrice de u dans une base de E, il existe $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ tel que $Ax = \lambda x$. Ainsi

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = {}^t(\lambda x)\overline{x} = {}^t(Ax)\overline{x} = {}^tx{}^tA\overline{x} = {}^txA\overline{x} = {}^tx\overline{\lambda x} = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Donc $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère ensuite e_1 un vecteur propre unitaire associé à λ et $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$. Alors H est stable par u : pour tout $x \in H$, on a

$$\langle u(x), e_1 \rangle = \langle x, u(e_1) \rangle = \lambda \langle x, e_1 \rangle = 0,$$

et $v := u_{|H} \in L(H)$ est symétrique : pour tout $x, y \in H$, on a

$$\langle v(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \langle x, v(y) \rangle.$$

De plus $dim(H) = n - 1$, donc, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(e_2, ..., e_n)$ de H diagonalisant v. Par conséquent $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de E diagonalisant u. $\square$

Exercice. ** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Montrer que l'application suivante définie un produit scalaire sur E :

$$f : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{array}.$$

<u>Indication</u> : On pourra montrer $f(2x, y) = 2f(x, y)$ puis $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ pour tout $x, x_1, x_2, y \in E$.

Démonstration. L'application f est symétrique définie positive. Il reste à montrer la caractère bilinéaire. Soit $x, y \in E$. Alors, par identité du parallélogramme appliquée à x et $x + y$,

$$\|2x+y\|^2 + \|-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x+y\|^2),$$

et à x et $y - x$

$$\|y\|^2 + \|2x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y-x\|^2).$$

Ainsi

$$f(2x, y) = \frac{1}{4}\left(\|2x+y\|^2 - \|2x-y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(2\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\right) = 2f(x, y).$$

Soit $x_1, x_2 \in E$, alors

$$f(x_1,y)+f(x_2,y) = \frac{1}{4}\left(\|x_1+y\|^2 - \|x_1-y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\|^2 - \left(\|x_1-y\|^2 + \|x_2-y\|^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\|x_1+x_2+2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2 - \left(\|x_1+x_2-2y\|^2 + \|x_1-x_2\|^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\|x_1+x_2+2y\|^2 - \|x_1+x_2-2y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x_1+x_2}{2}+y\right\|^2 - \left\|\frac{x_1+x_2}{2}-y\right\|^2\right)$$

$$= 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, y\right) = f(x_1+x_2, y).$$

On en déduit donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx,y) = nf(x,y).$$

Puis

$$f(x,y) = f(x,y)+f(-x,y)-f(-x,y) = f(0,y)-f(-x,y) = -f(-x,y).$$

Ainsi

$$f(-nx,y) = nf(-x,y) = -nf(x,y).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(nx,y) = nf(x,y).$$

Puis, pour $q = \frac{n}{m}$, on a

$$f(qx,y) = f\left(n\frac{x}{m}, y\right) = nf\left(\frac{x}{m}, y\right) = \frac{n}{m}f(x,y) = qf(x,y),$$

avec l'antépénultième égalité justifiée par $f(x,y) = f\left(m\frac{x}{m}, y\right) = mf\left(\frac{x}{m}, y\right)$.
Il ne reste plus qu'à justiifer la continuité de f pour pouvoir conclure, en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y).$$

En effet on a f continue car

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \leq \frac{1}{4}\left((\|x\|+\|y\|)^2 - (\|x\|-\|y\|)^2\right) = \|x\|\,\|y\|.$$

□

Exercice. *** Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t\ln(t)-a-bt)^2\,dt$.

Démonstration. On note $f(t) = t\ln(t)$. On cherche à déterminer $d(f, \mathbb{R}_1[X])$ avec d la distance sur $C^0([0,1])$ induite par le produit scalaire

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^1 f_1(t) f_2(t) dt.$$

Or $(1, t)$ forme une base de $\mathbb{R}_1[X]$. On l'orthonormalise par le procédé de Gram-Schmidt. On considère $e_1 = 1$ et $e_2 = id_{[0,1]} - \lambda e_1 \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $\langle e_2, e_1 \rangle = 0$ i.e.

$$\int_0^1 (t - \lambda) \times 1 dt = 0, \text{i.e. } \lambda = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}.$$

Donc (e_1, e_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$ que l'on normalise en la base orthonormale (v_1, v_2) avec $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = e_1$ et

$$v_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{id_{[0,1]} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt}} = \sqrt{12}(id_{[0,1]} - \frac{1}{2}).$$

Ainsi, comme $\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie,

$$d(f, \mathbb{R}_1[X]) = \left\| f - p_{\mathbb{R}_1[X]}(f) \right\|,$$

avec

$$p_{\mathbb{R}_1[X]}(f) = \langle f, v_1 \rangle v_1 + \langle f, v_2 \rangle v_2 = \int_0^1 t\ln(t) dt + \int_0^1 t\ln(t) \sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2}\right) dt \sqrt{12} \left(id_{[0,1]} - \frac{1}{2}\right),$$

avec, par intégrations par parties,

$$\int_0^1 t\ln(t) dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t} dt = 0 - 0 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt = -\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 t^2\ln(t) dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^3}{3}\frac{1}{t} dt = 0 - 0 - \int_0^1 \frac{t^2}{3} dt = -\frac{1}{9}$$

et

Or

$$\int_0^1 t^2\ln(t)^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^3}{3} 2\ln(t)\frac{1}{t} dt = -\frac{2}{3}\int_0^1 t^2\ln(t) dt = \frac{2}{27}.$$

Ainsi, après calculs, on obtient $p_{\mathbb{R}_1[X]}$ puis $d(f, \mathbb{R}_1[X])$. $\square$

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité de Bessel.

Réponse. Soit E un espace préhilbertien réel, $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormale de vecteurs de E et $x \in E$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Démonstration. On considère $F = Vect(e_1, ..., e_n)$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \in F$. Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\langle x - y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle y, e_j \rangle = 0.$$

Donc $x - y \in F^{\perp}$, d'où, par théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

De plus, le cas d'égalité a lieu si et seulement si $x = y$, i.e. $x \in F$. □

Exercice. ** On considère $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, pour $f, g \in E$,

$$\phi(f, g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ définisse un produit scalaire sur E.

Démonstration. L'application ϕ est bien définie, bilinéaire, symétrique et positive. Soit $f \in E$ tel que

$$0 = \phi(f, f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n)^2.$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = 0.$$

Ainsi, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[0, 1]$, alors $f = 0$. Dans ce cas ϕ est définie ce qui montre que ϕ est un produit scalaire.
Réciproquement on suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas dense dans $[0, 1]$. Alors il existe un intervalle $I \subset [0, 1]$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \notin I.$$

On considère $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue non nulle telle que

$$\forall x \in [0, 1] \backslash I, f(x) = 0.$$

Alors

$$\phi(f, f) = 0.$$

Ainsi ϕ n'est pas définie, donc n'est pas un produit scalaire sur E. □

Exercice. *** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, i.e. une application continue bijective de bijection réciproque continue.
Indications : Pour l'injectivité on pourra utiliser le résultat suivant : Si A et A' sont deux matrices symétriques commutantes alors A et A' sont co-orthodiagonalisables.

Démonstration.
Etape 1 : $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors, d'après le théorème spectral, S est orthogonalement diagonalisable, donc il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$S = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1} = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P.$$

Ainsi, par continuité et passage à la limite,

$$exp(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1})^k = Pexp(Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n))^t P = PDiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})^t P.$$

Donc ${}^t exp(S) = exp(S)$, d'où $exp(S) \subset S_n(\mathbb{R})$.
Puis pour $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, comme ${}^t P \in O_n(\mathbb{R})$,

$$\langle X, exp(S)X \rangle = \langle {}^t PX, Diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})^t PX \rangle = \langle Y, Diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})Y \rangle$$

en notant $Y = PX \neq 0$.
D'où

$$\langle X, exp(S)X \rangle = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} y_i^2 > 0.$$

Ainsi $exp(S) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ce qui montre que $exp(S_n(\mathbb{R})) \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Etape 2 : Continuité
La fonction exp est continue sur $M_n(\mathbb{R})$. En effet la série fonctionnelle $\sum \frac{1}{k!} A^k$ est normalement convergente sur tout compact de $M_n(\mathbb{R})$ et les fonctions $A \longmapsto \frac{1}{k!} A^k$ sont continues sur $M_n(\mathbb{R})$. Donc, par restriction, $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est également continue.
Etape 2 : Surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors, par théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\mu_1, ..., \mu_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que

$$B = PDiag(\mu_1, ..., \mu_n)^t P.$$

Or $exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijectif, donc $\forall i \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, e^{\lambda_i} = \mu_i$.
On considère donc

$$S = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P$$

pour avoir $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $exp(S) = B$ ce qui montre la surjectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Etape 3 : Injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$
Soit $(A, A') \in (S_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $exp(A) = exp(A')$. Ainsi, comme précédemment,

$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P.$$

De plus, en considérant $(\lambda'_1, ..., \lambda'_m)$ les λ_i distincts, les $(e^{\lambda'_1}, ..., e^{\lambda'_m})$ sont distincts par injectivité de l'exponentielle réelle, donc il existe un polynôme interpolateur de Lagrange $Q \in \mathbb{R}[X]$

tel que $\forall i \in [\![1, m]\!], Q(e^{\lambda'_i}) = \lambda'_i$.
Ainsi
$$\forall i \in [\![1, n]\!], Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i.$$
Alors
$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P = PDiag(Q(e^{\lambda_1}), ..., Q(e^{\lambda_n}))^t P = Q(exp(A)) = Q(exp(A')).$$
D'où $AA' = A'A$ ie A et A' commutent.
Or, par théorème spectral, A et A' sont orthodiagonalisables, donc A et A' sont orthodiagonalisables dans une même base orthonormée, i.e. il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda'_1, ..., \lambda'_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que
$$A = PDiag(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t P, A' = PDiag(\lambda'_1, ..., \lambda'_n)^t P.$$
D'où
$$PDiag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})^t P = exp(A) = exp(A') = PDiag(e^{\lambda'_1}, ..., e^{\lambda'_n})^t P$$
Ainsi
$$\forall i \in [\![1, n]\!], e^{\lambda_i} = e^{\lambda'_i}.$$
Puis, par injectivité de l'exponentielle réelle, $A = A'$ ce qui montre l'injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Etape 4 : Continuité de $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$
Utilisons la caractérisation séquentielle de continuité : Soit $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} = (exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in (S_n^{++}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ et $B = exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que
$$B_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} B.$$
Sous-étape a : $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée
Comme la suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, elle est bornée pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$.
De même, par continuité du passage à l'inverse, la suite $(B_p^{-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B^{-1}, donc elle est également bornée pour $\|\cdot\|_2$.
Or pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, on a
$$\|S\|_2 = max(Sp(S)) =: \rho(S).$$
Ainsi, il existe $(C, C') \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall p \in \mathbb{N}, max(Sp(B_p)) \subset]0, C], max(Sp(B_p^{-1})) \subset]0, C'].$$
Or $max(Sp(B_p^{-1})) = min(Sp(B_p))^{-1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc
$$\forall p \in \mathbb{N}, Sp(B_p) \subset [C'^{-1}, C] \subset]0, +\infty[$$
Puis
$$\forall p \in \mathbb{N}, Sp(A_p) = ln(Sp(B_p)) \subset [ln(C'^{-1}), ln(C))] \subset \mathbb{R}$$
Donc la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme $\|\cdot\|_2$.
Sous-étape b : $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ n'admet qu'une valeur d'adhérence
Soit $A' \in S_n(\mathbb{R})$ et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tel que
$$A_{\varphi(p)} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A'$$

Donc, par continuité de exp :

$$B_{\varphi(p)} = exp(A_{\varphi(p)}) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} exp(A')$$

D'où, par unicité de la limité, $exp(A) = exp(A')$, puis, par injectivité de $exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A = A'$.

Sous-étape c : Conclusion

Ainsi, comme $S_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, $A_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} A$ ce qui montre que $exp^{-1} : S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ est continue. $\square$

Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques.

Réponse. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$. Alors u est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de E est symétrique.

Démonstration. Soit b une base orthonormée de E et $A = Mat_b(u) \in M_n(\mathbb{R})$.
Sens direct : On suppose que u est symétrique. Alors, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$A_{ji} = \langle \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k, b_j \rangle = \langle u(b_i), b_j \rangle = \langle b_i, u(b_j) \rangle = \langle b_i, \sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k \rangle = A_{ij}.$$

Donc A est symétrique.
Sens indirect : On suppose que A est symétrique. Soit $x, y \in E$. Alors

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle u(b_i), b_j \rangle,$$

avec, pour tout $i, j [\![1, n]\!]$,

$$\langle u(b_i), b_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k, b_j \rangle = A_{ji} = A_{ij} = \langle b_i, u(b_j) \rangle.$$

D'où $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ ce qui montre que u est symétrique. □

Exercice. * Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = id_E$. Montrer que $u^2 = id_E$.

Démonstration. D'après le théorème spectral, la matrice D de u dans une base orthonormée est diagonale. Comme $u^p = id_E$, on a $D^p = I_n$. Ainsi les valeurs diagonales de D sont racines de $X^p - 1$, et réelles, donc appartiennent à $\{-1, 1\}$. D'où $D^2 = I_n$ puis $u^2 = id_E$. □

Exercice. ** On considère $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt.$$

On considère également le sous-espace vectoriel $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.

Démonstration. Soit $g \in F^\perp$. Alors

$$\forall f \in F, 0 = \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt.$$

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in F$ définie par

$$f_n(t) = \left\{ \begin{array}{cl} g(t) & \text{si } t \in [-1, 1] \setminus \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ -g\left(-\frac{1}{n}\right) nt & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right] \\ g\left(\frac{1}{n}\right) nt & \text{si } t \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \end{array} \right.$$

Ainsi
$$\|g-f_n\|_1 = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \left| g(t) + g\left(-\frac{1}{n}\right) nt \right| dt + \int_0^{\frac{1}{n}} \left| g(t) - g\left(\frac{1}{n}\right) nt \right| dt,$$
avec
$$\int_0^{\frac{1}{n}} \left| g(t) - g\left(\frac{1}{n}\right) nt \right| dt \leq \|g\|_\infty \left(\frac{1}{n} + \int_0^{\frac{1}{n}} ntdt \right) = \|g\|_\infty \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$
et de même
$$\int_{-\frac{1}{n}}^{0} \left| g(t) + g\left(-\frac{1}{n}\right) nt \right| dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Donc
$$\|g-f_n\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_{-1}^{1} f_n(t) g(t) dt = 0.$$
Donc
$$\int_{-1}^{1} g(t)^2 dt = \int_{-1}^{1} g(t)(g(t) - f_n(t)) dt \leq \|g\|_\infty \|g-f_n\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Par conséquent $\|g\|_2 = 0$, puis par continuité de g, $g = 0$. Ainsi $G^\perp = 0$. □

Exercice. ** Soit E un espace préhilbertien réel de dimension n et $u \in L(E)$ symétrique de trace nulle.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. En déduire qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.

Démonstration.

1. Or u est symétrique, donc, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Ainsi, en notant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associés,
$$0 = tr(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u(e_i) \rangle.$$
Ainsi
$$\sum_{i=1}^{n} \langle \sum_{j=1}^{n} e_j, u(e_i) \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \langle e_j, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0,$$
avec $x := \sum_{j=1}^{n} e_j \neq 0$ car la famille est libre.

2. On raisonne par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$ le résultat est clair. On suppose le résultat vrai au rang $n-1$ pour $n \geq 2$. On considère $y = \frac{x}{\|x\|}$, $F = Vect(y)$ et $G = F^{\perp}$. Or $dim(G) = n-1$, donc il existe une base orthonormée $(y_2, ..., y_n)$ de G. Ainsi la matrice symétrique de u dans la base $(y, y_2, ..., y_n)$ s'écrit, comme $u(y) \in F^{\perp} = G$, $\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$, avec $B \in S_{n-1}(\mathbb{R})$. On considère v l'endomorphisme sur G dont la matrice dans la base $(y_2, ..., y_n)$ est donnée par B. Alors $tr(v) = tr(u) - 0 = 0$ et v est symétrique. Donc, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée de G dans laquelle la matrice de v est de coefficients diagonaux nuls. Par conséquent en concaténant y avec cette base, on obtient une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale de coefficients diagonaux nuls.

$\square$