

**Exercice.** Résoudre l'équation différentielle  $y'(t) + y(t) = \frac{1}{1+e^t}$  sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* L'équation homogène associée est  $y' + y = 0$  de solution  $y_0(t) = \lambda e^{-t}$  sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On considère  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $y_c(t) := c(t)e^{-t}$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $y_c$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, c'(t)e^{-t} = c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} + c(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t},$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, c'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} =$$

Ainsi une solution particulière est donnée par

$$y_c(t) = \ln(1+e^t)e^{-t}.$$

Puis les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda e^{-t} + \ln(1+e^t)e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

**Exercice.** Résoudre l'équation différentielle  $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^{-t}$ .

*Démonstration.* L'équation homogène associée est  $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t)$  d'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 3$  de solutions 1 et 3. Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Or  $-1$  n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière de la forme  $y_c(t) = (at+b)e^{-t}$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Ainsi, par dérivation,

$$\forall t \in \mathbb{R}, at + (b - 2a) - 4(-at - b + a) + 3(at + b) = 2t + 1.$$

Donc

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases}$$

D'où  $a = \frac{1}{4}, b = \frac{5}{16}$ .

Par conséquent les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} + \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-t}, a, b \in \mathbb{R}.$$

□

**Exercice.** Déterminer les solutions réelles du système différentielle  $X'(t) = AX(t)$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)^2(X-2) + X-1-1 = ((X-1)^2+1)(X-2).\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de  $A$  sont  $2, 1+i, 1-i$  distinctes. Ainsi  $A$  est  $\mathbb{C}$ -diagonalisable. Un vecteur propre associé à  $2$  est  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Puis

$$A - (1+i)I_3 = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Donc un vecteur propre associé à  $1+i$  est  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$ , puis un vecteur propre associé à

$1-i$  est donc  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}$ .

Par conséquent des solutions réelles indépendantes sont

$$e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \operatorname{Re} \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ ie^{(1+i)t} \\ -ie^{(i+1)t} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \operatorname{Im} \begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ ie^{(1+i)t} \\ -ie^{(i+1)t} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Donc les solutions sont exactement de la forme

$$X(t) = ae^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + ce^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

□

**Exercice.** On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est antisymétrique.
2. Toutes les solutions de  $X'(t) = AX(t)$  sont de norme constante.

*Démonstration.*

Sens direct : On suppose que  $A$  est antisymétrique. Soit  $X$  solution de  $X'(t) = AX(t)$ . On considère  $y(t) = \|X(t)\|^2 = {}^tX(t)X(t)$ . Alors

$$y'(t) = {}^tX'(t)X(t) + {}^tX(t)X'(t) = {}^tX(t) \underbrace{{}^tA}_{=-A} X(t) + {}^tX(t)AX(t) = 0.$$

Donc  $y$  est constant i.e.  $X$  est de norme constante.

Sens indirect : On suppose que toutes les solutions de  $X'(t) = AX(t)$  soient de norme constante. Ainsi, pour toute solution  $X$ , on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 = y'(t) = {}^tX(t)(A + {}^tA)X(t).$$

En particulier, en  $t = 0$ , on a

$$0 = {}^tX(0)(A + {}^tA)X(0).$$

Or  $A + {}^tA$  est symétrique, donc, par théorème spectral, diagonalisable (dans une base orthonormée). Soit  $\lambda \in Sp(A + {}^tA)$ . Alors il existe  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  vecteur propre de  $A + {}^tA$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . On considère  $X$  solution de  $X'(t) = AX(t)$  telle que  $X(0) = v$ . Ainsi

$$0 = {}^tv(A + {}^tA)v = \lambda \|v\|^2.$$

D'où  $\lambda = 0$  puis  $A + {}^tA = 0$  i.e.  ${}^tA = -A$ , i.e.  $A$  est antisymétrique. □

**Exercice.** Résoudre l'équation différentielle  $(1+t)y'(t) + y(t) = 1 + \ln(1+t)$  sur  $] -1, +\infty[$ .

*Démonstration.* L'équation homogène associée est  $(1+t)y'(t) + y(t) = 0$  i.e.  $y'(t) = -\frac{1}{1+t}y(t)$  de solution  $y_0(t) = \lambda e^{-\ln(1+t)} = \frac{\lambda}{1+t}$  sur  $] -1, +\infty[$ . On considère  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $y_c(t) = \frac{c(t)}{1+t}$  sur  $] -1, +\infty[$ . Alors  $y_c$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall t \in ] -1, +\infty[, (1+t) \left( c'(t) \frac{1}{1+t} - c(t) \frac{1}{(1+t)^2} \right) + \frac{c(t)}{1+t} = 1 + \ln(1+t),$$

i.e.

$$\forall t \in ] -1, +\infty[, c'(t) = 1 + \ln(1+t).$$

Ainsi une solution particulière est donnée par

$$y_c(t) = \frac{1}{1+t} \int_0^t (1 + \ln(1+s)) ds = \frac{1}{1+t} (t + [(s+1)\ln(1+s) - s]_0^t) = \ln(1+t)$$

. Puis les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \frac{\lambda}{1+t} + \ln(1+t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

**Exercice.** Résoudre l'équation différentielle  $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^t$ .

*Démonstration.* L'équation homogène associée est  $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t)$  d'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 3$  de solutions 1 et 3. Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Or 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière de la forme  $y_c(t) = (at^2 + bt + c)e^t$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Ainsi, par dérivation,

$$\forall t \in \mathbb{R}, at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b + c - 4(at^2 + (2a+b)t + b + c) + 3(at^2 + bt + c) = 2t + 1.$$

Donc

$$\begin{cases} 4a + b - 4(2a + b) + 3b = 2 \\ 2a + 2b + c - 4(b + c) + 3c = 1 \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} -4a = 2 \\ 2a - 2b = 1. \end{cases}$$

D'où  $a = -\frac{1}{2}, b = -1$  et on peut prendre  $c = 0$ . Par conséquent les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} - \left( \frac{1}{2}t^2 + t \right) e^t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

□

**Exercice.** Résoudre le système différentiel  $\begin{cases} x_1'(t) = 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t} \end{cases}$

*Démonstration.* On considère  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Alors le système différentiel se réécrit

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Or le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A = (X - 2)(X - 3)$ . Donc  $A$  est diagonalisable de valeurs propres 2 et 3. Des vecteurs propres associés sont  $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ . Alors

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note  $Y = P^{-1}X$ . Alors l'équation différentielle se réécrit

$$Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t).$$

D'où

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) + t \\ y_2'(t) = 3y_2(t) + e^{3t}. \end{cases}$$

Ainsi les solutions de  $Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t)$  sont exactement de la forme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \\ \mu e^{3t} + te^{3t} \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Puis les solutions du système différentiel sont exactement de la forme

$$\begin{cases} x_1(t) = -3\lambda e^{2t} + 4\mu e^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} \\ x_2(t) = 4\lambda e^{2t} - 4\mu e^{3t} - 2t - 1 - 4te^{3t} \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

□

**Exercice.** Soit  $A \in M_2(\mathbb{C})$ . Montrer que les solutions de  $X'(t) = AX(t)$  tendent vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont toutes de partie réelle strictement négative.

*Démonstration.* Comme  $\mathbb{C}$  est algébriquement clos,  $A$  est trigonalisable. Donc il existe  $P \in GL_2(\mathbb{C})$  tel que  $P^{-1}AP = T$  avec  $T$  de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Ainsi l'équation différentielle se réécrit  $Y'(t) = TY(t)$  avec  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ .

Distinguons ensuite les deux cas possibles pour  $T$  :

1. Si  $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  alors les solutions de  $Y'(t) = TY(t)$  sont exactement de la forme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} ae^{\lambda t} \\ be^{\mu t} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}.$$

Ainsi les solutions de  $Y'(t) = TY(t)$  tendent vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si  $Re(\lambda) < 0$  et  $Re(\mu) < 0$ .

2. Si  $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  alors les solutions de  $Y'(t) = TY(t)$  vérifient

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda y_2(t), \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} y_1(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t) \\ y_2(t) = be^{\lambda t} \end{cases}, b \in \mathbb{C},$$

i.e.

$$\begin{cases} y_1(t) = ae^{\lambda t} + \mu bte^{\lambda t} \\ y_2(t) = be^{\lambda t} \end{cases}, a, b \in \mathbb{C}.$$

Ainsi les solutions de  $Y'(t) = TY(t)$  tendent vers 0 en  $+\infty$  si et seulement si  $Re(\lambda) < 0$  et  $Re(\mu) < 0$ .

Par conséquent, comme les normes sont équivalentes sur  $\mathbb{C}^2$ , les solutions de  $X'(t) = AX(t)$  tendent vers en  $+\infty$  si et seulement si  $Re(\lambda) < 0$  et  $Re(\mu) < 0$ .  $\square$

**Exercice.** Résoudre l'équation différentielle  $y'(t) - \frac{y(t)}{t} = t^2$  sur  $]0, +\infty[$ .

*Démonstration.* L'équation homogène associée est  $y'(t) - \frac{y(t)}{t} = 0$  i.e.  $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$  de solution  $y_0(t) = \lambda e^{\ln(t)} = \lambda t$  sur  $]0, +\infty[$ . On considère  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $y_c(t) = c(t)t$  sur  $]0, +\infty[$ . Alors  $y_c$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall t \in ]0, +\infty[, c'(t)t + c(t) - \frac{c(t)t}{t} = t^2,$$

i.e.

$$\forall t \in ]0, +\infty[, c'(t) = t.$$

Ainsi une solution particulière est donnée par

$$y_c(t) = \frac{t^3}{2}.$$

Puis les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda t + \frac{t^3}{2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

**Exercice.** Résoudre l'équation différentielle  $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = te^t$ .

*Démonstration.* L'équation homogène associée est  $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 0$  d'équation caractéristique  $r^2 + 2r + 4 = 0$  de solutions  $-1 + i\sqrt{3}$  et  $-1 - i\sqrt{3}$ . Donc les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0(t) = \left( \lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t) \right) e^{-t}.$$

On cherche une solution particulière de la forme  $y_c(t) = (at + b)e^t$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . Ainsi, par dérivation

$$\forall t \in \mathbb{R}, at + b + 2a + 2(at + b + a) + 4(at + b) = t.$$

Donc

$$\begin{cases} 7a &= 1 \\ 7b + 4a &= 0. \end{cases}$$

D'où  $a = \frac{1}{7}, b = -\frac{4}{49}$ . Par conséquent les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \left( \lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t) \right) e^{-t} + \left( \frac{1}{7}t - \frac{4}{49} \right) e^t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

□

**Exercice.** Résoudre le système différentiel 
$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

*Démonstration.* On considère  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ . Alors le système se réécrit

$$X'(t) = AX(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Or la polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X+1 & 1 \\ -2 & X-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & X+1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)((X+1)(X-2) + 2) - 2 + X + 1 = (X-2)(X^2 - X) + X - 1 \\ &= ((X-2)X + 1)(X-1) = (X^2 - 2X + 1)(X-1) = (X-1)^3. \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $A^3 = I_3$ , d'où  $N = A - I_3$  est nilpotente. Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\exp(tA) = \exp(tI_3) \exp(tN) = e^t \left( I_3 + tN + \frac{t^2 N^2}{2} \right).$$

Donc, après calculs,

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les solutions de  $X' = AX$  sont exactement de la forme

$$X(t) = \exp(tA)X_0, X_0 \in \mathbb{R}^3,$$

puis les solutions du système différentiel sont exactement de la forme

$$\begin{cases} x_1(t) &= e^t(a(t+1) + bt^2 + c(t^2+t)) \\ x_2(t) &= e^t(at + b(t^2 - 2t + 1) + c(t^2 - t)) \\ x_3(t) &= e^t(-at + b(-t^2 + 2t) + c(-t^2 + t + 1)) \end{cases}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

□

**Exercice.** Montrer que  $f : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$  (prolongée par 0 en 0) n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.



*Démonstration.* La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, on peut montrer, par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , qu'il existe une fonction polynômiale  $P_n$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(t) = P_n \left( \frac{1}{t} \right) e^{-\frac{1}{t^2}}.$$

Ainsi

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

D'où  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $f^{(n)}(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On suppose par l'absurde que  $f$  est solution d'une équation différentielle linéaire homogène

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Alors  $f$  et la fonction nulle vérifient le même problème de Cauchy

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \\ y^{(n)}(0) = \dots = y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Donc, par unicité dans le théorème de Cauchy, on en déduit que  $f = 0$  ce qui n'est pas. Par conséquent  $f$  n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.  $\square$