Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice. Soit I intervalle réel et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, on dit que f est logarithmiquement convexe (ou log-convexe) si $\ln(f)$ est convexe sur I.

1. Montrer que si f est log-convexe alors f est convexe.
2. Montrer que si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f^α est convexe, alors
$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (f(x))^{1-\lambda}(f(y))^\lambda.$$
   Indication : Faire tendre α vers 0 dans la définition de f^α convexe.
3. En déduire que si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, f^α est convexe, alors f est log-convexe.
4. Citer un exemple de fonction convexe non log-convexe.

Exercice.

1. Montrer que la convergence absolue d'une intégrale entraîne sa convergence.
2. Montrer que la réciproque est fausse en utilisant un contre-exemple.

Exercice. Soit $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ tel que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l \in [0,1[$. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Question de cours. Donner la nature des intégrales $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ et $\int_0^1 x^\alpha dx$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice. Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que
$$\forall u, v \in \mathbb{R}_+^*, u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v$$

Exercice. Montrer qu'il existe $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$ et que $\int_0^\infty f(x)dx < +\infty$.

Exercice. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Montrer que f et f' sont intégrables sur $[0, +\infty[$.

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème d'intégration par parties pour des fonctions de classe C^1 sur $]a,b[\subset \mathbb{R}$.

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue convexe. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale

$$B_n(f) : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x) \end{array}$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $B_n(f)$ est convexe.

Exercice. Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $\int_0^1 f(x)^2 dx < +\infty$ alors $\int_0^1 |f(x)| dx < +\infty$
2. Est ce que ce résultat est encore vrai avec $[1,+\infty[$ plutôt que $]0,1[$?

Exercice. Soit $f \in C^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ intégrable.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^A f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)cos(xt)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$