Question de cours. Enoncer le théorème de convergence dominée.

Exercice. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est antisymétrique.
2. Toutes les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont de norme constante.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et nulle en 0. On considère

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice. Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t} \end{array} \right.$

Exercice. Pour $x \in \,]1, +\infty[$, on considère $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{itx}\, dt$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Etudier la continuité de f.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Exercice. Soit I intervalle réel, $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer que $F : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt$ est continue sur I.

Exercice. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que les solutions de $X'(t) = AX(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

Exercice. On considère $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}}dt$.

1. Etudier l'ensemble de définition.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition.

Exercice. Déterminer les solutions réelles du système différentielle $X'(t) = AX(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Exercice. On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction gaussienne $G_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-\alpha x^2}$.
Calculer sa transformée de Fourier F_α définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+^*, F(G_\alpha)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x) e^{-ix\xi} dx$$

Exercice. Résoudre le système différentel $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$

Exercice. Montrer que $f : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$ (prolongée par 0 en 0) n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche