Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Exercice. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^n dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et nulle en 0. On considère

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice. Pour $x \in]1, +\infty[$, on considère $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{it^x} dt$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Etudier la continuité de f.
3. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre.

Exercice. On considère $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}} dt$.

1. Etudier l'ensemble de définition.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition.

Exercice. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{itx}-1|}{|x|} |f(t)| dt \leq M.$$

1. Montrer que la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la limite en 0^+ de $h(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}-1}{x} f(t) dt$.

Exercice. Soit I intervalle réel, $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer que $F : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t) dt$ est continue sur I.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer le théorème de convergence dominée.

Exercice. On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction gaussienne $G_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-\alpha x^2}$.
Calculer sa transformée de Fourier F_α définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+^*, F(G_\alpha)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x) e^{-ix\xi} dx$$

Exercice. Pour $x > 0$, on considère $s(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} dt$.

1. Montrer que s est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $s(x) \underset{x \to 0+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche