Question de cours. Enoncer la formule de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée.

Exercice. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $f_{|S}$ soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in B(0,1)$ tel que $df(x_0) = 0$.

Exercice. On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction gaussienne $G_\alpha : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-\alpha x^2}$.
Calculer sa transformée de Fourier F_α définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}_+^*, F(G_\alpha)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} G_\alpha(x) e^{-ix\xi} dx$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est α-homogène si

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

1. Citer un exemple non trivial de fonction α-homogène.
2. On suppose que f est différentiable sur $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) f est α-homogène.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$,
   $$f(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Montrer que la composée de deux applications différentiables est différentiable et exprimer la différentielle de la composée.

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme et

$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 (P(t))^3 dt. \end{array}$$

Montrer que ϕ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.

Exercice. On considère $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2+t}} dt.$

1. Etudier l'ensemble de définition.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et nulle en 0. On considère

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Déterminer la dérivée de $B \circ (f, g)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow E, g : \mathbb{R} \longrightarrow F$ dérivables et $B : E \times F \longrightarrow G$ application bilinéaire avec E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie. Le démontrer.

Exercice. Soit I intervalle réel, $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Montrer que $F : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt$ est continue sur I.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction exponentielle $exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est différentiable en la matrice nulle $0 \in M_n(\mathbb{R})$ et déterminer $d(exp)(0)$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^k \end{array}$. Montrer que φ_k est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ de différentielle donnée par, pour tout $A, H \in M_n(\mathbb{R})$,
$$d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$
3. En déduire que la fonction exponentielle matricielle est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
<u>Indication</u> : On pourra utiliser le théorème suivant.

Théorème. Soit $\sum \phi_k$ une série d'applications différentiables $\phi_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que la série des applications linéaires $\sum d\phi_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$ alors la fonction somme $\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k$ est différentiable sur $\mathbb{R}^m$ de différentielle $d\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} d\phi_k$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Exercice supplémentaire

Exercice. Soit U un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$. On considère $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$. On dit que f est holomorphe sur U si f est continûment dérivable sur U, i.e.

$$\forall z \in U, \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

et f' est continue sur U.

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et seulement si u et v sont de classe C^1 sur U et vérifient les conditions de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

2. Montrer que si f est holomorphe et u, v de classe C^2 alors u et v sont harmoniques i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$