Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de la chaîne pour les dérivées partielles d'une composée.

Exercice. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $f_{|S}$ soit constante. Montrer qu'il existe $x_0 \in B(0,1)$ tel que $df(x_0) = 0$.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est α-homogène si

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

1. Citer des exemples de fonction α-homogène.
2. On suppose que f est différentiable sur $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.
   (a) f est α-homogène.
   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$,
$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 telle que

$$(E) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

On considère également $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, g(u,v) = f(u+v, u-v).$$

1. Montrer que g est de classe C^2 et vérifie
$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0.$$
2. En déduire toutes les fonctions de classe C^2 vérifiant (E)

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Montrer que la composée de deux applications différentiables est différentiable et exprimer la différentielle de la composée.

Exercice. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme et

$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_0^1 (P(t))^3 dt. \end{array}$$

Montrer que ϕ est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.

Exercice. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. Déterminer les fonctions harmoniques $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$f(x,y) = \varphi(u(x,y)) \text{ avec } u(x,y) = \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \text{ et } \varphi \in C^2(]-1,1[,\mathbb{R}).$$

Exercice. Soit U un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$. On considère $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $u = Re(f)$ et $v = Im(f)$. On dit que f est holomorphe sur U si f est continûment dérivable sur U, i.e.

$$\forall z \in U, \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z) \in \mathbb{C}$$

et f' est continue sur U.

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et seulement si u et v sont de classe C^1 sur U et vérifient les conditions de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

2. Montrer que si f est holomorphe et u, v de classe C^2 alors u et v sont harmoniques i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Déterminer la dérivée de $B \circ (f, g)$ avec $f : \mathbb{R} \longrightarrow E, g : \mathbb{R} \longrightarrow F$ dérivables et $B : E \times F \longrightarrow G$ application bilinéaire avec E, F, G espaces vectoriels normés de dimension finie. Le démontrer.

Exercice. Soit $c \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Indication : On pourra utiliser le changement de variable

$$f(x,t) = F(x + at, x + bt) =: F(u(x,t), v(x,t)).$$

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction exponentielle $exp : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est différentiable en la matrice nulle $0 \in M_n(\mathbb{R})$ et déterminer $d(exp)(0)$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_k : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longmapsto & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^k \end{array}$. Montrer que φ_k est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ de différentielle donnée par, pour tout $A, H \in M_n(\mathbb{R})$,

$$d\varphi_k(A)(H) = \sum_{\substack{0 \leq i,j \leq k-1 \\ i+j=k-1}} A^i H A^j.$$

3. En déduire que la fonction exponentielle matricielle est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.
   Indication : On pourra utiliser le théorème suivant.

Théorème. Soit $\sum \phi_k$ une série d'applications différentiables $\phi_k : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que la série des applications linéaires $\sum d\phi_k$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^m$ alors la fonction somme $\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k$ est différentiable sur $\mathbb{R}^m$ de différentielle $d\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} d\phi_k$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche