Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + y(t) = \frac{1}{1+e^t}$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. L'équation homogène associé est $y' + y = 0$ de solution $y_0(t) = \lambda e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $y_c(t) := c(t)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$. Alors y_c est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, c'(t)e^{-t} = c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} + c(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t},$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, c'(t) = \frac{e^t}{1+e^t} =$$

Ainsi une solution particulière est donnée par

$$y_c(t) = \ln(1+e^t)e^{-t}.$$

Puis les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda e^{-t} + \ln(1+e^t)e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^{-t}$.

Démonstration. L'équation homogène associée est $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t)$ d'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3$ de solutions 1 et 3. Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Or -1 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière de la forme $y_c(t) = (at+b)e^{-t}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Ainsi, par dérivation,

$$\forall t \in \mathbb{R}, at + (b-2a) - 4(-at - b + a) + 3(at+b) = 2t + 1.$$

Donc

$$\begin{cases} 8a &= 2 \\ 8b - 6a &= 1 \end{cases}$$

D'où $a = \frac{1}{4}, b = \frac{5}{16}$.
Par conséquent les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} + \left(\frac{t}{4} + \frac{5}{16}\right) e^{-t}, a, b \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. Déterminer les solutions réelles du système différentielle $X'(t) = AX(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & -1 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)^2(X-2) + X - 1 - 1 = ((X-1)^2+1)(X-2).$$

Donc les valeurs propres de A sont $2, 1+i, 1-i$ distinctes. Ainsi A est $\mathbb{C}$-diagonalisable. Un vecteur propre associé à 2 est $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puis

$$A - (1+i)I_3 = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Donc un vecteur propre associé à $1+i$ est $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}$, puis un vecteur propre associé à $1-i$ est donc $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}$.

Par conséquent des solutions réelles indépendantes sont

$$e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Re\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ ie^{(1+i)t} \\ -ie^{(i+1)t} \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, Im\begin{pmatrix} e^{(1+i)t} \\ ie^{(1+i)t} \\ -ie^{(i+1)t} \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Donc les solutions sont exactement de la forme

$$X(t) = ae^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + ce^t\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est antisymétrique.
2. Toutes les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sont de norme constante.

Démonstration.
Sens direct : On suppose que A est antisymétrique. Soit X solution de $X'(t) = AX(t)$. On considère $y(t) = \|X(t)\|^2 = {}^tX(t)X(t)$. Alors

$$y'(t) = {}^tX'(t)X(t) + {}^tX(t)X'(t) = {}^tX(t)\underbrace{{}^tA}_{=-A}X(t) + {}^tX(t)AX(t) = 0.$$

Donc y est constant i.e. X est de norme constante.
Sens indirect : On suppose que toutes les solutions de $X'(t) = AX(t)$ soient de norme constante. Ainsi, pour toute solution X, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 = y'(t) = {}^tX(t)(A + {}^tA)X(t).$$

En particulier, en $t = 0$, on a

$$0 = {}^tX(0)(A + {}^tA)X(0).$$

Or $A + {}^tA$ est symétrique, donc, par théorème spectral, diagonalisable (dans une base orthonormée). Soit $\lambda \in Sp(A + {}^tA)$. Alors il existe $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ vecteur propre de $A + {}^tA$ associé à la valeur propre λ. On considère X solution de $X'(t) = AX(t)$ telle que $X(0) = v$. Ainsi

$$0 = {}^tv(A + {}^tA)v = \lambda \|v\|^2.$$

D'où $\lambda = 0$ puis $A + {}^tA = 0$ i.e. ${}^tA = -A$, i.e. A est antisymétrique. $\square$

Exercice. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ tel que $f(x) + f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. On considère $g = f + f'$. Alors f est solution de l'équation différentielle $y' + y = g$.
Or l'équation différentielle homogène associée est $y' + y = 0$ de solutions $t \longmapsto \lambda e^{-t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\lambda \in C^1(\mathbb{R})$ et $y_\lambda : t \longmapsto \lambda(t)e^{-t}$. Alors y_λ est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\lambda'(t)e^{-t} = g(t).$$

Ainsi une solution particulière de l'équation est donnée par

$$y_0 : t \longmapsto \left(\int_0^t g(x)e^x dx\right) e^{-t}.$$

Par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(t) = \lambda g(t) + \left(\int_0^t g(x)e^x dx\right) e^{-t}.$$

Or $g \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall t \geq A, |g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus $e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe $B \geq A$ tel que

$$\forall t \geq B, e^{-t} \leq \frac{\varepsilon}{2\int_0^A |g(x)|e^x dx}.$$

Par conséquent, pour tout $t \geq B$,

$$\left|\left(\int_0^t g(x)e^x dx\right) e^{-t}\right| \leq \left(\int_0^A |g(x)|e^x dx\right) e^{-t} + \left(\int_A^t |g(x)|e^x dx\right) e^{-t} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_A^t e^x dx\right) e^{-t} \leq \varepsilon.$$

Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $(1+t)y'(t)+y(t) = 1+\ln(1+t)$ sur $]-1,+\infty[$.

Démonstration. L'équation homogène associée est $(1+t)y'(t)+y(t) = 0$ i.e. $y'(t) = -\frac{1}{1+t}y(t)$ de solution $y_0(t) = \lambda e^{-\ln(1+t)} = \frac{\lambda}{1+t}$ sur $]-1,+\infty[$. On considère $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $y_c(t) = \frac{c(t)}{1+t}$ sur $]-1,+\infty[$. Alors y_c est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall t \in \,]-1,+\infty[, (1+t)\left(c'(t)\frac{1}{1+t} - c(t)\frac{1}{(1+t)^2}\right) + \frac{c(t)}{1+t} = 1+\ln(t+t),$$

i.e.

$$\forall t \in \,]-1,+\infty[, c'(t) = 1+\ln(1+t).$$

Ainsi une solution particulière est donnée par

$$y_c(t) = \frac{1}{1+t}\int_0^t (1+\ln(1+s))\,ds = \frac{1}{1+t}\left(t + [(s+1)\ln(1+s) - s]_0^t\right) = \ln(1+t)$$

. Puis les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \frac{\lambda}{1+t} + \ln(1+t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = (2t+1)e^t$.

Démonstration. L'équation homogène associée est $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t)$ d'équation caractéristique $r^2 - 4r + 3$ de solutions 1 et 3. Donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Or 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche donc une solution particulière de la forme $y_c(t) = (at^2+bt+c)e^t$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ainsi, par dérivation,

$$\forall t \in \mathbb{R}, at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b + c - 4(at^2 + (2a+b)t + b + c) + 3(at^2 + bt + c) = 2t + 1.$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4a+b-4(2a+b)+3b & = & 2 \\ 2a+2b+c-4(b+c)+3c & = & 1 \end{array}\right.$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{rcl} -4a & = & 2 \\ 2a-2b & = & 1. \end{array}\right.$$

D'où $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ et on peut prendre $c = 0$. Par conséquent les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} - \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)e^t, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = 6x_1(t) + 3x_2(t) - 3t + 4e^{3t} \\ x_2'(t) = -4x_1(t) - x_2(t) + 4t - 4e^{3t} \end{array} \right.$

Démonstration. On considère $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors le système différentiel se réécrit

$$X'(t) = AX(t) + B(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} -3t + 4e^{3t} \\ 4t - 4e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Or le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-2)(X-3)$. Donc A est diagonalisable de valeurs propres 2 et 3. Des vecteurs propres associés sont $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note $Y = P^{-1}X$. Alors l'équation différentielle se réécrit

$$Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t).$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1'(t) & = & 2y_1(t) + t \\ y_2'(t) & = & 3y_2(t) + e^{3t}. \end{array} \right.$$

Ainsi les solutions de $Y'(t) = P^{-1}APY(t) + P^{-1}B(t)$ sont exactement de la forme

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \\ \mu e^{3t} + te^{3t} \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Puis les solutions du système différentiel sont exactement de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1(t) & = & -3\lambda e^{2t} + 4\mu e^{3t} + \frac{3t}{2} + \frac{3}{4} + 4te^{3t} \\ x_2(t) & = & 4\lambda e^{2t} - 4\mu e^{3t} - 2t - 1 - 4te^{3t} \end{array} \right., \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que les solutions de $X'(t) = AX(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative.

Démonstration. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, A est trigonalisable. Donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $P^{-1}AP = T$ avec T de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Ainsi l'équation différentielle se réécrit $Y'(t) = TY(t)$ avec $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
Distinguons ensuite les deux cas possibles pour T :

1. Si $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ alors les solutions de $Y'(t) = TY(t)$ sont exactement de la forme
$$Y(t) = \begin{pmatrix} ae^{\lambda t} \\ be^{\mu t} \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}.$$
Ainsi les solutions de $Y'(t) = TY(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $Re(\lambda) < 0$ et $Re(\mu) < 0$.
2. Si $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ alors les solutions de $Y'(t) = TY(t)$ vérifient
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & \lambda y_1(t) + \mu y_2(t) \\ y_2'(t) & = & \lambda y_2(t), \end{array} \right.$$
i.e.
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & \lambda y_1(t) + \mu y_2(t) \\ y_2(t) & = & be^{\lambda t} \end{array} \right., b \in \mathbb{C},$$
i.e.
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1(t) & = & ae^{\lambda t} + \mu bte^{\lambda t} \\ y_2(t) & = & be^{\lambda t} \end{array} \right., a, b \in \mathbb{C}.$$
Ainsi les solutions de $Y'(t) = TY(t)$ tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $Re(\lambda) < 0$ et $Re(\mu) < 0$.

Par conséquent, comme les normes sont équivalentes sur $\mathbb{C}^2$, les solutions de $X'(t) = AX(t)$ tendent vers en $+\infty$ si et seulement si $Re(\lambda) < 0$ et $Re(\mu) < 0$. $\square$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue intégrable. On considère l'équation différentielle $y'' + f(t)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation admet une solution non bornée.

Démonstration. On suppose que l'équation différentielle n'admettent que des solutions bornées. Soit y_1 une solution bornée de l'équation différentielle. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$y_1'(t) = \int_0^t y_1''(x)dx = -\int_0^t f(x)y_1(x)dx.$$
Or $f(x)y_1(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(f(x))$ et f est intégrable, donc y_1' admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. De plus si $l > 0$ alors il existe $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall t \geq A, y_1'(t) \geq \frac{l}{2}.$$
Donc
$$\forall t \geq A, y_1(t) \geq \frac{l}{2}(t - A) + y_1(A).$$
Ce qui contredit le caractère borné de y_1. De même si $l < 0$. Par conséquent $y_1' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On considère y_2 une solution de l'équation différentielle indépendante de y_1. Alors
$$W'(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}' = 0.$$
Par conséquent $W = c \in \mathbb{R}^*$ sauf qu'en faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient $c = 0$. $\square$

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) - \frac{y(t)}{t} = t^2$ sur $]0, +\infty[$.

Démonstration. L'équation homogène associé est $y'(t) - \frac{y(t)}{t} = 0$ i.e. $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$ de solution $y_0(t) = \lambda e^{\ln(t)} = \lambda t$ sur $]0, +\infty[$. On considère $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $y_c(t) = c(t)t$ sur $]0, +\infty[$. Alors y_c est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\forall t \in]0, +\infty[, c'(t)t + c(t) - \frac{c(t)t}{t} = t^2,$$

i.e.

$$\forall t \in]0, +\infty[, c'(t) = t.$$

Ainsi une solution particulière est donnée par

$$y_c(t) = \frac{t^3}{2}.$$

Puis les solutions de l'équations sont exactement de la forme

$$y(t) = \lambda t + \frac{t^3}{t}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = te^t$.

Démonstration. L'équation homogène associé est $y''(t) + 2y'(t) + 4y(t) = 0$ d'équation caractéristique $r^2 + 2r + 4 = 0$ de solutions $-1 + i\sqrt{3}$ et $-1 - i\sqrt{3}$. Donc les solutions réelles de l'équation homogène sont de la forme

$$y_0(t) = \left(\lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t)\right) e^{-t}.$$

On cherche une solution particulière de la forme $y_c(t) = (at + b)e^t$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Ainsi, par dérivation

$$\forall t \in \mathbb{R}, at + b + 2a + 2(at + b + a) + 4(at + b) = t.$$

Donc

$$\begin{cases} 7a &= 1 \\ 7b + 4a &= 0. \end{cases}$$

D'où $a = \frac{1}{7}, b = -\frac{4}{49}$. Par conséquent les solutions de l'équation sont exactement de la forme

$$y(t) = \left(\lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t)\right) e^{-t} + \left(\frac{1}{7}t - \frac{4}{49}\right) e^{-t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

□

Exercice. Résoudre le système différentel $\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$

Démonstration. On considère $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Alors le système se réécrit

$$X'(t) = AX(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Or la polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ -1 & X+1 & 1 \\ 1 & -2 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X+1 & 1 \\ -2 & X-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & X+1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (X-2)((X+1)(X-2)+2) - 2 + X + 1 = (X-2)(X^2 - X) + X - 1$$
$$= ((X-2)X+1)(X-1) = (X^2-2X+1)(X-1) = (X-1)^3.$$

Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^3 = I_3$, d'où $N = A - I_3$ est nilpotente. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tA) = \exp(tI_3)\exp(tN) = e^t\left(I_3 + tN + \frac{t^2N^2}{2}\right).$$

Donc, après calculs,

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les solutions de $X' = AX$ sont exactement de la forme

$$X(t) = \exp(tA)X_0, X_0 \in \mathbb{R}^3,$$

puis les solutions du système différentiel sont exactement de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & e^t(a(t+1) + bt^2 + c(t^2+t)) \\ x_2(t) & = & e^t(at + b(t^2-2t+1) + c(t^2-t)) \\ x_3(t) & = & e^t(-at + b(-t^2+2t) + c(-t^2+t+1)) \end{array}\right. , a, b, c \in \mathbb{R}$$

□

Exercice. Montrer que $f : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$ (prolongée par 0 en 0) n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène.

Démonstration. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on peut montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, qu'il existe une fonction polynômiale P_n tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(t) = P_n\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t^2}}.$$

Ainsi

$$f^{(n)}(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'où f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On suppose par l'absurde que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

Alors f et la fonction nulle vérifient le même problème de Cauchy

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \\ y^{(n)}(0) = ... = y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Donc, par unicité dans le théorème de Cauchy, on en déduit que $f = 0$ ce qui n'est pas. Par conséquent f n'est solution d'aucune équation différentielle linéaire homogène. $\square$

Exercice. Déterminer une équation différentielle homogène du second ordre admettant les solutions ϕ_1 et ϕ_2 définies par

$$\phi_1(x) = e^{x^2}, \phi_2(x) = e^{-x^2}.$$

Démonstration. On raisonne par analyse-synthèse. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel ϕ_1 et ϕ_2 vérifient une équation différentielle du second ordre. Or ϕ_1 et ϕ_2 sont linéairement indépendantes. Donc (ϕ_1, ϕ_2) forme une base de solutions. Soit y une solution de l'équation différentielle. Alors le Wronskien de y, ϕ_1, ϕ_2 s'annule i.e. pour tout $x \in I$,

$$0 = \begin{vmatrix} y(x) & \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ y'(x) & \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \\ y''(x) & \phi_1''(x) & \phi_2''(x) \end{vmatrix}$$

$$= y(x)(\phi_1'(x)\phi_2''(x) - \phi_2'(x)\phi_1''(x)) - y'(x)(\phi_1(x)\phi_2''(x) - \phi_2(x)\phi_1''(x)) + y''(x)(\phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_2(x)\phi_1'(x))$$

Ainsi, après simplification des dérivées de ϕ_1 et ϕ_2,

$$0 = xy''(x) - y'(x) - 4x^3 y(x).$$

En particulier ϕ_1 et ϕ_2 vérifient cette équation différentielle homogène du second ordre. $\square$