Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration des relations de comparaison sur un intervalle de la forme $[a, b[\subset \mathbb{R}$.

Exercice. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^n dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice. Soit $p, k \in \mathbb{N}^*$ et $f_{p,k} : x \in \,]0, 1] \longmapsto x^p ln(x)^k$.

1. Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0, 1]$.
   On note $K_{p,k} = \int_0^1 f_{p,k}(x)dx$.
2. On suppose $k \geq 1$. Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.
3. Exprimer $J_n := \int_0^1 (xln(x))^n dx$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que
$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration terme à terme.

Exercice. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq2}$ sur $[0, 1]$ définie par

$$\forall n \geq 2, \forall x \in [0, 1], f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de f_n pour $n \geq 2$.
2. Déterminer $\underset{n\to+\infty}{lim} f_n(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
3. Déterminer $\underset{n\to+\infty}{lim} \int_0^1 f_n(x)dx$.
4. Que pouvez-vous en conclure grâce au théorème de convergence dominée ?

Exercice. Déterminer un développement asymptotique à trois termes quand $x \longrightarrow +\infty$ de la fonction

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

Question de cours. Enoncer le théorème de convergence dominée.

Exercice. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Exercice. On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{sin(x)^2}{x^2} \end{array}, g : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{sin(x)}{x\sqrt{x}} \end{array}$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont intégrables sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.
3. On considère $G : x \in [1, +\infty[\longmapsto \int_x^{+\infty} g(t)dt$. Montrer que

   $$G(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

   Indication : Commencer par une intégration par partie dans $G(x)$ pour $x \in [1, +\infty[$.
4. On considère $F : x \in [1, +\infty[\longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$ et $K : x \in [1, +\infty[\longmapsto \int_x^{+\infty} \frac{cos(2t)}{2t^2}dt$. Montrer que

   $$\forall x \in [1, +\infty[, F(x) = \frac{1}{2x} - K(x)$$
5. Montrer que

   $$K(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2x}\right)$$
6. En déduire que

   $$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x} \text{ et } G(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(F(x))$$
7. On considère $h = f + g$ et $H = F + G$. Montrer que g et h sont équivalents en $+\infty$ mais pas G et H.