Question de cours. Enoncer et démontrer une caractérisation de la diagonalisabilité en termes de sous-espaces propres et en termes de polynôme caractéristique.

Exercice. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, montrer que $|||\cdot||| : A \in M_n(\mathbb{K}) \longmapsto \underset{x\in S(0,1)}{sup} \|Ax\|$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{K})$, appelé norme matricielle induite par $\|\cdot\|$.
2. Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_\infty$ vérifie
$$\forall A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K}), |||A|||_\infty = \underset{1\leq i\leq n}{max} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$
3. Montrer que la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_1$ vérifie
$$\forall A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K}), |||A|||_\infty = \underset{1\leq j\leq n}{max} \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|$$

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de Bolzanno-Weierstrass en dimension finie. On pourra commencer par énoncer clairement les étapes de la démonstration.

Exercice. On considère E l'ensemble des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Montrer que E est un K-espace vectoriel, déterminer une K-base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$.
   Montrer que f est bien définie, K-linéaire et déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ ... \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit f et g deux endomorphismes diagonalisables qui commutent $f \circ g = g \circ f$.
On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de f, $\mu_1, ..., \mu_q$ celles de g, $F_1, ..., F_p$ les sous-espaces propres de f et $G_1, ..., G_q$ ceux de g.

1. Soit $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, montrer que G_j est stable par f et F_i est stable par g.
2. On considère $H_{ij} = F_i \cap G_j$, montrer que $F_i = \bigoplus_{j=1}^{q} H_{ij}$.
3. En déduire le résultat suivant : il existe une base de vecteurs propres communs à f et g si et seulement si f et g commutent.
4. Montrer que si f et g commutent et sont diagonalisables alors $f + g$ est diagonalisable.

Question de cours. Enoncer et démontrer une caractérisation de la trigonalisabilité en termes de polynôme caractéristique.

Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in Sp(A)$ complexe, montrer que $\overline{\lambda} \in Sp(A)$ et que si $v \in E_\lambda(u)$ alors $\overline{v} \in E_{\overline{\lambda}}(u)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, déterminer une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ diagonale et semblable à A, ainsi qu'une matrice de passage.

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N, \|u_m - u_n\| \leq \varepsilon$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Est ce que ce résultat est encore vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$?