Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(ax+b) = f(x)$$

Montrer que f est constante.

Exercice.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \frac{cos(x)}{x}$.
   Montrer que f admet un unique extremum dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi\right]$ en un point x_n.
2. Donner un équivalent asymptotique de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} an + b + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. En déduire un équivalent de $f(x_n)$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Exercice.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\left(1+\frac{1}{kx}\right)^{kx} \underset{x\to+\infty}{=} e\left(1-\frac{1}{2kx}+\frac{11}{24k^2x^2}+o(\frac{1}{x^2}\right)$$
2. Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^2\left(a\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + b\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x} + c\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice.

1. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable en 0 et $f(0) = 0$.
Montrer que
$$\underset{n\to+\infty}{lim}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)\right) = f'(0)ln(2)$$
2. Montrer que
$$\underset{n\to+\infty}{lim}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\right) = 0$$

Exercice. On considère E l'ensemble des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Montrer que E est un K-espace vectoriel, déterminer une K-base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$
Montrer que f est bien définie, K-linéaire et déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ ... \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Exercice. Soit $f \in C^3([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que

$$-\frac{\lambda}{n^4} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{\lambda}{n^4}$$

2. Montrer que

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

3. Montrer que

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}(f(1)-f(0)) + \frac{1}{12n^2}(f'(1)-f'(0)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in N, u_{n+1} = sin(u_n), u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in Sp(A)$ complexe, montrer que $\overline{\lambda} \in Sp(A)$ et que si $v \in E_\lambda(u)$ alors $\overline{v} \in E_{\overline{\lambda}}(u)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, déterminer une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ diagonale et semblable à A, ainsi qu'une matrice de passage.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche