

**Question de cours.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Montrer que  $E$  et  $E^*$  sont isomorphes.

**Exercice.** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

1. Déterminer la limite uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Etudier la dérivabilité de la limite.
3. Que peut-on en conclure grâce au théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions ?

**Exercice.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , convergeant simplement vers  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , et toutes  $k$ -lipschiziennes, avec  $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que la convergence est uniforme.

*Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*

**Question de cours.** Enoncer le théorème d'interversion des limites (ou de la double limite).

**Exercice.** Montrer que les formes linéaires  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  forment une base de  $(\mathbb{R}^3)^*$  avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \varphi_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3, \varphi_2(x) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, \varphi_3(x) = 3x_1 + 7x_2 + x_3$$

Déterminer la base antéduale de  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ .

**Exercice.** Etudier la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

*Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*

**Question de cours.** Énoncer le théorème de dérivation d'une limite de fonctions.

**Exercice.** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, f_n(z) = 1 + z + \dots + z^n$$

1. Soit  $a \in [0, 1[$ , montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f(z) = (1 - z)^{-1}$  sur  $\overline{D}(0, a) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$ .
2. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement mais non uniformément dans le disque unité ouvert  $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ .

**Exercice.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels et  $f \in L(E, F)$ . On définit la transposée de  $f$  par

$${}^t f : \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

1. Montrer que  ${}^t f \in L(F^*, E^*)$ .
2. Vérifier les relations suivantes :
  - (a) Soit  $g \in L(E, F)$ ,  ${}^t(f + g) = {}^t f + {}^t g$ .
  - (b) Soit  $\lambda \in K$ ,  ${}^t(\lambda f) = \lambda({}^t f)$ .
  - (c) Soit  $g \in L(F, E)$ ,  ${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f$ .
  - (d)  ${}^t({}^t f) = f$  en utilisant l'identification par isomorphisme canonique  $E \simeq E^{**}$ .
  - (e) Si  $f$  est bijective alors  ${}^t f$  est aussi bijective et  ${}^t(f^{-1}) = ({}^t f)^{-1}$ .
3. On suppose  $E$  et  $F$  de dimension finie. Soit  $b$  une base de  $E$  et  $b'$  une base de  $F$ ,  $b^*$  la base duale de  $b$  et  $b'^*$  la base duale de  $b'$ . Montrer que

$$\text{Mat}_{b'^*, b^*}({}^t f) = {}^t \text{Mat}_{b, b'}(f)$$

*Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*