**Question de cours.** Enoncer le théorème de continuité sous le signe somme.

**Exercice.** Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

**Exercice.** On considère la fonction somme

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Montrer que $\zeta$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

**Exercice.** Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & si \quad x \in [0, n] \\ 0 & si \quad x > n \end{cases}$$

*Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*

**Question de cours.** Enconcer le théorème de dérivation sous le signe somme.

**Exercice.** On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, f_n(z) = 1 + z + ... + z^n$$

1. Soit $a \in [0, 1[$, montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f(z) = (1 - z)^{-1}$ sur $\overline{D}(0, a) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq a\}$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément dans le disque unité ouvert $D(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

**Exercice.** Soit $p, k \in \mathbb{N}^*$ et $f_{p,k} : x \in ]0, 1] \longmapsto x^p ln(x)^k$.

1. Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0, 1]$.
   On note $K_{p,k} = \int_0^1 f_{p,k}(x)dx$.
2. On suppose $k \geq 1$. Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.
3. Exprimer $J_n := \int_0^1 (xln(x))^n dx$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que
   $$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

**Exercice.** On considére la série de fonctions

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

1. Déterminer le domaine de définition $\Delta$ de $f$.
2. Montrer que $f$ est continue sur $\Delta$.

*Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*

**Question de cours.** Enoncer le théorème d'intégration d'une fonction somme.

**Exercice.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et toutes $k$-lipschiziennes, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la convergence est uniforme.

**Exercice.** Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions

$$\sum f_n = \sum (arctan(x+n) - arctan(n))$$

sur $\mathbb{R}$ puis sur tout invervalle fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$.
**Indication** : On rappelle l'identité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}^*, arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

*Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche*