Khôlleur : Dorian Cacitti-Holland
Elève :

Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries réels de termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Comment se comportent les séries associées ? Le démontrer. Que peut-on dire des restes et des sommes partielles en cas de convergence ou de divergence ? Démontrer le cas de convergence.

Réponse. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. En cas de convergence on a équivalence des restes et en cas de divergence on a éqquivalence des sommes partielles.

Démonstration.
De même nature : Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on a $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, donc pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, (1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$$

Ainsi si $\sum u_n$ (respectivement $\sum v_n$) converge alors $\sum v_n$ (respectivement $\sum u_n$) converge.
En cas de convergence : Dans ce cas, on peut considérer les restes des séries et on a par sommation de l'inégalité précédente :

$$\forall n \geq N, (1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

ce qui établit l'équivalence des restes.
En cas de divergence : On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles.
Alors

$$\forall n \geq N, S_n - S_N = \sum_{k=N+1}^{n} u_k, T_n - T_N = \sum_{k=N+1}^{n} v_k$$

Donc, par l'encadrement précédent,

$$\forall n \geq N, (1-\varepsilon)(T_n - T_N) \leq S_n - S_N \leq (1+\varepsilon)(T_n - T_N)$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall n \geq N, \left(1 - \varepsilon - \frac{(1-\varepsilon)T_N - S_N}{T_n}\right) T_n \leq S_n \leq \left(1 + \varepsilon - \frac{(1+\varepsilon)T_N - S_N}{T_n}\right) T_n$$

Or $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, donc $S_n, T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ainsi

$$\frac{(1-\varepsilon)T_N - S_N}{T_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \frac{(1+\varepsilon)T_N - S_N}{T_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi il existe $N' \geq N$ tel que

$$\forall n \geq N', -\varepsilon \leq \frac{(1-\varepsilon)T_N - S_N}{T_n} \leq \varepsilon, -\varepsilon \frac{(1+\varepsilon)T_N - S_N}{T_n} \leq \varepsilon$$

D'où

$$\forall n \geq N', (1-2\varepsilon)T_n \leq S_n \leq (1+2\varepsilon)T_n$$

ce qui montre bien l'équivalence des sommes partielles. $\square$

Exercice. Etudier la nature des séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \frac{1-\sin(n)}{1+n\sqrt{n}}, v_n = \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}, w_n = e^{-\sqrt{2+n}}, x_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

Réponse. Les séries $\sum u_n, \sum w_n$ et $\sum x_n$ sont convergentes et la série $\sum v_n$ est divergente.

Démonstration.
Série $\sum u_n$: On a, par bornitude du sinus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{2}{1+n\sqrt{n}}$$

De plus $\frac{2}{1+n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ avec $\sum \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergente car $\frac{3}{2} > 1$.
Par conséquent, par théorème sur les séries à termes positifs $\sum \frac{2}{1+n\sqrt{n}}$ est convergente.
Puis, par théorème de comparaison, $\sum u_n$ est convergente.
Série $\sum v_n$: On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

avec $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente car $\frac{1}{2} < 1$, donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum v_n$ est divergente.
Série w_n : On a $w_n = \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, avec $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, donc, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum w_n$ est convergente.
Série x_n : On a

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}(1+o(1))$$

Donc, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, puis, par théorème de comparaison, $\sum x_n$ est convergente. □

Exercice. On dit qu'un série numérique $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro si, en notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \frac{S_1 + ... + S_n}{n}$$

1. Montrer que si $\sum u_n$ est une série convergente alors $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro.
2. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\sum u_n$ ne converge pas et que $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro.

Démonstration.

1. On suppose que $\sum u_n$ est une série convergente et on note S sa somme

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, |S_n - S| \leq \varepsilon$$

Puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |T_n - S| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k - S\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(S_k - S)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|S_k - S|$$

Ainsi, pour $n \geq N$,

$$|T_n - S| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|S_k - S| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|S_k - S| + \frac{n-N}{n}\varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|S_k - S| + \varepsilon$$

Or $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N', \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{k=1}^{N}|S_k - S|}$$

(on peut supposer $\sum\limits_{k=1}^{N}|S_k - S| \neq 0$ car sinon le résultat est immédiat.)
Ainsi, en posant $N_0 = \max(N, N')$, on a

$$\forall n \geq N_0, |T_n - S| \leq 2\varepsilon$$

D'où $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S.

2. La suite $(-1)^n$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum(-1)^n$ n'est pas convergente.
Par contre, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in 2\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{\operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

car $\frac{n}{2} - 1 \leq \operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right) \leq \frac{n}{2}$ d'où $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{Ent}\left(\frac{n}{2}\right)}{n} \leq \frac{1}{2}$ et par théorème des gendarmes.

□

Khôlleur : Dorian Cacitti-Holland
Elève :

Question de cours. Énoncer et démontrer le critère des séries alternées.

Réponse. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^N$ décroissante telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente. De plus sa somme S vérifie

$$\forall n \in N, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}, |R_n| \leq a_{n+1}$$

Démonstration. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$$

De plus

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergentes vers la même limite.
Ainsi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, ie la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.
De plus on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_{2n}| = |S - S_{2n}| = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$$

et, en utilisant l'inégalité précédente en $n+1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_{2n+1}| = |S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}$$

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq a_{n+1}$. □

Exercice. Etablir la convergence puis calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$$

Réponse. La série est convergente et $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{89}{96}$.

Démonstration.
<u>Convergence</u> : On a

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$$

Or le série $\sum \frac{2}{n^2}$ est convergente, donc, par théorème de comparaison des séries de termes positifs équivalents, la série $\sum u_n$ est convergente.
<u>Calcul de la somme</u> : On a

$$\forall n \geq 3, u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)}$$

Puis par décomposition en éléments simples il existe $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \geq 3, u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}$$

Or $\frac{2X-1}{X(X-2)(X+2)} = a + \frac{X}{X-2}b + \frac{X}{X+2}c$, donc, en évaluant en 0, on obtient $a = \frac{1}{4}$.
De même on a $b = \frac{3}{8}$ et $c = -\frac{5}{8}$.
Ainsi

$$\forall n \geq 3, u_n = \frac{3}{8}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{4}\frac{1}{n} - \frac{5}{8}\frac{1}{n+2}$$

Donc, par réindexation,

$$\forall N \geq 3, \sum_{n=3}^{N} u_n = \sum_{n=3}^{N}\left(\frac{3}{8}\frac{1}{n-2} + \frac{1}{4}\frac{1}{n} - \frac{5}{8}\frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{8}\sum_{n=1}^{N-2}\frac{1}{n} + \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n} - \frac{5}{8}\sum_{n=5}^{N+2}\frac{1}{n}$$

Puis, après simplification,

$$\sum_{n=3}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{=} \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + o(1)$$

D'où $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n = \frac{89}{96}$. $\square$

Exercice. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que R_n est bien défini.
2. Montrer que $R_n + R_{n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
3. Déterminer un équivalent de R_n.
4. Donner la nature de la série $\sum R_n$.

Démonstration.

1. D'après le critère des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
   De plus, en notant S la somme de cette série, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$$

3. D'après le critère des séries alternées appliqué à $\sum \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

   D'où

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, donc, en utilisant la question 2 :

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   ce qui montre que

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

4. Comme $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et que $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont des séries convergentes, on en déduit que la série $\sum R_n$ est convergente.

$\square$

Khôlleur : Dorian Cacitti-Holland
Elève :

Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, montrer que si $\sum |u_n|$ est une série convergente alors $\sum u_n$ est une série convergente.

Démonstration. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = max(u_n, 0)$ et $u_n^- = max(-u_n, 0)$.
Alors les suites $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^+ \leq |u_n|, u_n^- \leq |u_n|$$

Or $\sum |u_n|$ est convergente, donc les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes.
Puis, comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_n^+ - u_n^-$, on en déduit que $\sum u_n$ est convergente. □

Exercice. Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$$

Réponse. La série est divergente.

Démonstration. La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.
Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Puis, par relation de Chasles,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Or, par propriétés de ln,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \leq \sum_{k=2}^{n} \ln(n) = (n-1)\ln(n)$$

Donc

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)(n-1)} \geq \frac{1}{n-1}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n-1}$ diverge, donc, par théorème de comparaison $\sum u_n$ diverge. □

Exercice. On considère l'application continue

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |sin(2\pi x)| \end{array}$$

1. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge.
2. Montrer que la fonction f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.
3. Quelle hypothèse sur f manque-t-il pour appliquer le théorème de comparaison série-intégrale ?

Démonstration.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = |sin(2\pi n)| = 0$.
   Donc la série $\sum f(n)$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n) = 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors, comme f est positive, en notant $p = \text{Ent}(x)$, on a
   $$\int_0^x f(t)dt \geq \int_0^p f(t)dt = \sum_{n=0}^{p-1} \int_n^{n+1} f(t)dt$$
   Or f est 1-périodique, donc
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} sin(2\pi t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-sin(2\pi t))dt = \frac{2}{\pi}$$
   Ainsi
   $$\int_0^x f(t)dt \geq \sum_{n=0}^{p-1} \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} p \geq \frac{2}{\pi}(x-1)$$
   D'où $\int_0^x f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui montre, puisque $f \geq 0$, que f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.
3. Il manque l'hypothèse de décroissance de la fonction f pour appliquer le théorème de comparaison série-intégrale.

□

Exercice. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. Montrer que $\sum v_n$ est une série convergente.
3. Montrer que $\sum u_n$ est une série divergente.
4. Pourquoi les réponses aux questions précédentes ne mettent pas en défaut le théorème concernant les séries dont les termes sont équivalents ?

Démonstration.

1. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} = v_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ avec $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
2. La série $\sum v_n$ vérifie le critère des séries alternées, donc $\sum v_n$ est convergente.
3. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum v_n$ converge et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc, par sommation la série $\sum u_n$ diverge.
4. Tous les termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas positifs (ou négatifs).

$\square$