

Question de cours. Énoncer le théorème de Bézout. Comment obtenir une telle décomposition en pratique ?

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ tels que

$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$$

1. Montrer que A, B, C admettent un vecteur propre commun.
2. Montrer que A, B, C sont cotrigonalisables.

Exercice.

1. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de E et $Q \in K[X]$. On note $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de u .
 - (a) Montrer que si u est diagonalisable alors $Q(u)$ est diagonalisable.
 - (b) Montrer que $Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\}$
2. (a) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. Montrer que $\chi_B(A) \neq 0$.
 - (b) Soit $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(M) = AM - MB$$

Montrer que si $M \in \ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors

$$Q(A)M = MQ(B)$$

- (c) En déduire que $\forall C \in M_n(\mathbb{C}), \exists ! M \in M_n(\mathbb{C}), AM - MB = C$

Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in Sp(A)$ complexe, montrer que $\bar{\lambda} \in Sp(A)$ et que si $v \in E_\lambda(u)$ alors $\bar{v} \in E_{\bar{\lambda}}(u)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, déterminer une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ diagonale et semblable à A , ainsi qu'une matrice de passage.

Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Énoncer deux caractérisations de la trigonalisabilité d'un endomorphisme.

Exercice. Soit A un anneau commutatif et $a, b \in A$ tels que l'idéal $(a) + (b)$ soit principal. Montrer que l'idéal $(a) \cap (b)$ est principal.

Exercice. Soit E un K -espace vectoriel, f un endomorphisme de E , A et B deux polynômes à coefficients dans K , $D = PGCD(A, B)$ et $M = PPCM(A, B)$.

1. Montrer que $\ker(D(f)) = \ker(A(f)) \cap \ker(B(f))$.
2. Montrer que $\text{Im}(D(f)) = \text{Im}(A(f)) + \text{Im}(B(f))$.
3. Montrer que $\ker(M(f)) = \ker(A(f)) + \ker(B(f))$.
4. Montrer que $\text{Im}(M(f)) = \text{Im}(A(f)) \cap \text{Im}(B(f))$.

Exercice. On considère E l'ensemble des $M \in M_2(K)$ tels que $\text{tr}(M) = 0$.

1. Montrer que E est un K -espace vectoriel, déterminer une K -base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

Montrer que f est bien définie, K -linéaire et déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ \dots \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E . Que peut-on dire du polynôme caractéristique de $u|_F$? Le démontrer.

Exercice. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable puis, en notant

$u = u_A$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que dans la base canonique e de \mathbb{R}^3 , $Mat_e(u) = A$, déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 telle que $Mat_v(u)$ soit triangulaire supérieure.

Exercice. On dit qu'un anneau A est principal si pour tout idéal I de A , il existe $a \in A$ tel que $I = \langle a \rangle$.

Citer deux anneaux principaux.

Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Indication : Considérer l'idéal $\langle 2, X \rangle$.

Exercice. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n .

Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche