

Question de cours. Énoncer le théorème de Bézout. Comment obtenir une telle décomposition en pratique ?

Réponse. Soit A un anneau principal (\mathbb{Z} ou $K[X]$ par exemple) et $a, b \in A$ premiers entre eux alors il existe $u, v \in A$ tels que

$$1 = au + bv$$

En pratique, dans un anneau euclidien (donc principal), on utilise l'algorithme d'Euclide qui consiste en des divisions euclidiennes successives.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ tels que

$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$$

1. Montrer que A, B, C admettent un vecteur propre commun.
2. Montrer que A, B, C sont cotrigonalisables.

Démonstration.

1. Soit $x \in \mathbb{C}^n$ vecteur propre commun à A, B, C .
Alors il existe $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C \in \mathbb{C}$ tels que

$$Ax = \lambda_A x, Bx = \lambda_B x, Cx = \lambda_C x$$

Ainsi

$$Cx = ABx - BAx = \lambda_B Ax - \lambda_A Bx = \lambda_B \lambda_A x - \lambda_A \lambda_B x = 0$$

D'où $x \in \ker(C)$.

Or si $\ker(C) = \{0\}$ alors C est inversible, donc

$$C^{-1}AB - C^{-1}BA = I_n$$

D'où, comme B et C^{-1} commutent, $0 = \text{tr}(I_n) = n$ ce qui est absurde, donc $\ker(C) \neq \{0\}$.

Ainsi les endomorphismes définis par A et B laissent stable $\ker(C)$ car A et B commutent avec C . On peut donc considérer les endomorphismes de $\ker(C)$ induits A' et B' .

Ces endomorphismes commutent car

$$\forall y \in \ker(C), AB y - BA y = C y = 0$$

Ainsi A' et B' admettent un vecteur propre commun $x \in \ker(C)$.

En effet, comme \mathbb{C} est algébriquement clos, A' admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Puis $\ker(A' - \lambda I)$ est stable par B' car A' et B' commutent. Donc l'endomorphisme induit par la restriction de B' à $\ker(A' - \lambda I)$ admet une valeur propre μ : il existe $x \in \ker(A' - \lambda I) \setminus \{0\}$ tel que $B'x = \mu x$, et $A'x = \lambda x$.

Par conséquent $Ax = A'x = \lambda x$, $Bx = B'x = \mu x$ et $Cx = 0 = 0x$, d'où x est un vecteur propre commun à A, B, C .

2. On complète la famille (x) en une base (x, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{C}^n et on note P la matrice de passage avec la base canonique.

Ainsi

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A \end{pmatrix}, P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu & (*) \\ (0) & B \end{pmatrix}, P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ (0) & C \end{pmatrix}$$

On a donc $\overline{AB} - \overline{BA} = \overline{C}$, $\overline{AC} = \overline{CA}$ et $\overline{BC} = \overline{CB}$.

Par conséquent une récurrence sur la dimension permet de conclure. □

Exercice.

1. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de E et $Q \in K[X]$. On note $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de u .
 - (a) Montrer que si u est diagonalisable alors $Q(u)$ est diagonalisable.
 - (b) Montrer que $Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\}$
2. (a) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. Montrer que $\chi_B(A) \neq 0$.
 - (b) Soit $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(M) = AM - MB$$

Montrer que si $M \in \ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors

$$Q(A)M = MQ(B)$$

- (c) En déduire que $\forall C \in M_n(\mathbb{C}), \exists! M \in M_n(\mathbb{C}), AM - MB = C$

Démonstration.

1. (a) Comme u est diagonalisable, il existe une base b de E telle que

$$Mat_b(u) = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Ainsi

$$Mat_b(Q(u)) = Q(Mat_b(u)) = Q(Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = Diag(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n))$$

D'où $Q(u)$ est diagonalisable.

- (b) Comme \mathbb{C} est algébriquement clos, u est trigonalisable, donc, comme précédemment, $Q(u)$ est trigonalisable et la diagonale de $Mat_b(Q(u))$ est $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$, d'où $\chi_{Q(u)} = (X - Q(\lambda_1)) \dots (X - Q(\lambda_n))$, ainsi

$$Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\}$$

2. (a) On note $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Alors, d'après la question précédente,

$$Sp(\chi_B(A)) = \{\chi_B(\lambda_1), \dots, \chi_B(\lambda_p)\}$$

Donc les valeurs propres de $\chi_B(A)$ sont non nulles car

$$Z(\chi_B) \cap Sp(A) = Sp(B) \cap Sp(A) = \emptyset$$

Ainsi $\chi_B(A)$ est inversible ie $\det(\chi_B(A)) \neq 0$.

(b) Soit $M \in \ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$. Alors $M \in M_n(\mathbb{C})$ et

$$0 = \varphi(M) = AM - MB \text{ ie } AM = MB$$

Alors $A^2M = A(AM) = A(MB) = (MB)B = MB^2$ puis par récurrence on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = MB^k$$

Puis par linéarité $Q(A)M = MQ(B)$.

(c) L'application φ est linéaire. Puis pour $M \in \ker(\varphi)$ et $Q = \chi_B \in \mathbb{C}[X]$, d'après la question précédente,

$$\chi_B(A)M = M\chi_B(B) = 0$$

par théorème de Cayley-Hamilton.

De plus d'après la question 2.(a), $\chi_B(A)$ est inversible, donc $M = 0$.

Par conséquent φ est linéaire puis comme il s'agit d'un endomorphisme, φ est bijectif.

□

Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in Sp(A)$ complexe, montrer que $\bar{\lambda} \in Sp(A)$ et que si $v \in E_\lambda(u)$ alors $\bar{v} \in E_{\bar{\lambda}}(u)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, déterminer une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ diagonale et semblable à A , ainsi qu'une matrice de passage.

Démonstration.

1. Comme $\lambda \in Sp(A)$ complexe, il existe $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Av = \lambda v$. Ainsi, comme A est réelle,

$$\bar{\lambda} \bar{v} = \overline{\lambda v} = \overline{Av} = \overline{A} \bar{v} = A \bar{v}$$

avec $\bar{v} \neq 0$.

2. On a $\chi_A = X \left(X - \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} \right) \left(X - \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \right) = X (X^2 + 3X + 3)$.
Donc

$$Sp(A) = \left\{ 0, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

et, après calcul et utilisation de la question précédente, une matrice de passage est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1+i\sqrt{3} & -1-i\sqrt{3} \\ 1 & -1-i\sqrt{3} & -1+i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

□

Question de cours. Énoncer deux caractérisations de la trigonalisabilité d'un endomorphisme.

Réponse. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n , alors u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Exercice. Soit A un anneau commutatif et $a, b \in A$ tels que l'idéal $(a) + (b)$ soit principal. Montrer que l'idéal $(a) \cap (b)$ est principal.

Démonstration. Comme $(a) + (b)$ est principal, il existe $d \in A$ tel que

$$(a) + (b) = (d)$$

Soit $x \in (a) \cap (b)$, alors il existe $u, v \in A$ tel que $x = ua$ et $x = vb$.

Or $a, b \in (a) + (b) = (d)$, donc il existe $\alpha, \beta \in A$ tels que $a = d\alpha$ et $b = d\beta$.

De plus $d \in (d) = (a) + (b)$, donc il existe $\lambda, \mu \in A$ tels que $d = \lambda a + \mu b$.

Ainsi

$$\begin{aligned} x &= u(\alpha d) = u\alpha(\lambda a + \mu b) = \lambda\alpha(ua) + u\mu\alpha(b) = \lambda\alpha(x) + u\mu\alpha d\beta = \alpha\lambda v(b) + u\mu\alpha\beta d \\ &= \alpha\lambda v d\beta + u\mu\alpha\beta d = \alpha\beta d(\lambda v + \mu u) \end{aligned}$$

D'où, en notant $m = \alpha\beta d$, on a $x \in (m)$, ce qui montre que $(a) \cap (b) \subset (m)$.

Réciproquement soit $x \in (m)$, alors il existe $y \in A$ tel que $x = ym = y\alpha\beta d$, d'où $x = y\beta a$ et $x = y\alpha b$. D'où $x \in (a) \cap (b)$, ce qui montre que $(a) \cap (b) \subset (m)$.

Par conséquent $(a) \cap (b) = (m)$ est principal. \square

Exercice. Soit E un K -espace vectoriel, f un endomorphisme de E , A et B deux polynômes à coefficients dans K , $D = PGCD(A, B)$ et $M = PPCM(A, B)$.

1. Montrer que $\ker(D(f)) = \ker(A(f)) \cap \ker(B(f))$.
2. Montrer que $\text{Im}(D(f)) = \text{Im}(A(f)) + \text{Im}(B(f))$.
3. Montrer que $\ker(M(f)) = \ker(A(f)) + \ker(B(f))$.
4. Montrer que $\text{Im}(M(f)) = \text{Im}(A(f)) \cap \text{Im}(B(f))$.

Démonstration. Commençons par remarquer qu'il existe $A', B' \in K[X]$ tels que $A = DA'$ et $B = DB'$ avec A' et B' premiers entre eux.

Or $MD = AB = D^2 A' B'$, ainsi $M = DA' B'$.

Puis par relation de Bézout sur A' et B' , il existe $P, Q \in K[X]$ tels que

$$1 = A'P + B'Q$$

1. On a $A(f) = A'(f) \circ D(f)$, donc $\ker(D(f)) \subset \ker(A(f))$.
De même $\ker(D(f)) \subset \ker(B(f))$, d'où $\ker(D(f)) \subset \ker(A(f)) \cap \ker(B(f))$.
Réciproquement soit $x \in \ker(A(f)) \cap \ker(B(f))$, alors

$$D(f)(x) = P(f) \circ A(f)(x) + Q(f) \circ B(f)(x) = 0$$

Donc $x \in \ker(D(f))$.

Par conséquent $\ker(D(f)) = \ker(A(f)) \cap \ker(B(f))$.

2. On a $A(f) = A'(f) \circ D(f)$, donc $Im(A(f)) \subset Im(D(f))$.
 De même $Im(A(f)) \subset Im(D(f))$, d'où $Im(A(f)) + Im(B(f)) \subset Im(D(f))$.
 Réciproquement soit $y \in Im(D(f))$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = D(f)(x) = A(f) \circ P(f)(x) + B(f) \circ Q(f)(x) \in Im(A(f)) + Im(B(f))$$

Par conséquent $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.

3. On a $M = DA'B' = AB'$, donc $M(f) = A(f) \circ B'(f)$, d'où $ker(A(f)) \subset ker(M(f))$.
 De même $ker(B(f)) \subset ker(M(f))$, d'où $ker(A(f)) + ker(B(f)) \subset ker(M(f))$.
 Réciproquement soit $x \in ker(M(f))$, alors $M(f)(x) = 0$.

Or

$$x = A'(f) \circ P(f)(x) + B'(f) \circ Q(f)(x)$$

avec $B(f)(A'(f) \circ P(f)(x)) = (BA'P)(f)(x) = (MP)(f)(x) = P(f) \circ M(f)(x) = 0$.

De même $A(f)(B'(f) \circ Q(f)(x)) = 0$, d'où $x \in ker(B(f)) + ker(A(f))$.

Par conséquent $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.

4. On a $M(f) = A(f) \circ B'(f)$, donc $Im(M(f)) \subset Im(A(f))$.
 De même $Im(M(f)) \subset Im(B(f))$, d'où $Im(M(f)) \subset Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.
 Réciproquement soit $y \in Im(A(f)) \cap Im(B(f))$, alors il existe $x_A, x_B \in E$ tels que

$$y = A(f)(x_A) \text{ et } y = B(f)(x_B)$$

Or

$$y = A'(f) \circ P(f)(y) + B'(f) \circ Q(f)(y)$$

avec

$$A'(f) \circ P(f)(y) = (A'PB)(f)(x) = M(f) \circ P(f) \in Im(M(f)) \text{ et } B'(f) \circ Q(f)(y) \in Im(M(f))$$

Donc $y \in Im(M(f))$.

Par conséquent $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

□

Exercice. On considère E l'ensemble des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Montrer que E est un K -espace vectoriel, déterminer une K -base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$f : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ M \longmapsto MB - BM \end{array}$$

Montrer que f est bien définie, K -linéaire et déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ \dots \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

1. E vérifie bien les axiomes d'un K -espace vectoriel grâce notamment à la linéarité de l'application trace.

Soit $A \in M_2(K)$, alors

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \iff a + d = 0 \iff a = -d$$

Donc

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

Ainsi $b = (E_1, E_2, E_3)$ est une famille génératrice de E , de plus il s'agit d'une famille libre, donc (E_1, E_2, E_3) est une base de E , d'où E est de dimension 3.

2. Soit $M \in E$, alors $tr(f(M)) = tr(MB) - tr(BM) = tr(MB) - tr(MB) = 0$, d'où f est bien définie.

L'application f est linéaire par bilinéarité du produit matriciel.

De plus $f(E_1) = -4E_3, f(E_2) = 2E_1 + 2E_2, f(E_3) = -2E_3$.

Donc

$$C := Mat_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. On détermine χ_C puis on diagonalise C avec les matrices de passage pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, C^n = 2^n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(-1)^n & -(1 + (-1)^n) & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}$, comme $Mat_b(f^n) = C^n$, on obtient

$$f^n(A) = af^n(E_1) + bf^n(E_2) + cf^n(E_3) = 2^n \begin{pmatrix} & b & \\ 2a(-1)^n - b(1 + (-1)^n) + c(-1)^n & & b \\ & & -b \end{pmatrix}$$

□

Question de cours. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E . Que peut-on dire du polynôme caractéristique de $u|_F$? Le démontrer.

Réponse. Premièrement, pour que $u|_F$ soit un endomorphisme, il faut que F soit stable par u . Dans ce cas on peut considérer son polynôme caractéristique $\chi' := \chi_{u|_F}$. On a alors $\chi' \mid \chi_u$.

En effet soit (e_1, \dots, e_k) une base de F que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E .

Alors, comme F est u -stable, en notant $B = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_k)}(u|_F)$ et $A = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u)$, on a

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ (0) & * \end{pmatrix}$$

D'où

$$\chi_u = \det(XI_n - A) = \det \begin{pmatrix} XI_k - B & * \\ (0) & ** \end{pmatrix} = \det(XI_k - B)Q = \chi'Q$$

avec $Q \in K[X]$.

Ainsi $\chi' \mid \chi_u$.

Exercice. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable puis, en notant

$u = u_A$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que dans la base canonique e de \mathbb{R}^3 , $\text{Mat}_e(u) = A$, déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 telle que $\text{Mat}_v(u)$ soit triangulaire supérieure.

Démonstration. On a, après calcul, $\chi_A = (X - 1)^2(X + 2)$ scindé, donc A est trigonalisable et ses valeurs propres 1 (de multiplicité algébrique 2) et -2 (de multiplicité algébrique 1).

Ainsi, en notant u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que, dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 , $A = \text{Mat}_e(u)$, on a l'existence d'une base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 telle que

$$\text{Mat}_v(u) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} u(v_1) = v_1 \\ u(v_2) = av_1 + v_2 \\ u(v_3) = bv_1 + cv_2 - 2v_3 \end{cases}$$

La première équation donne, en notant x_1, y_1, z_1 les coordonnées de v_1 dans la base e ,

$$\begin{cases} -4x_1 & -2z_1 = x_1 \\ 5x_1 & +y_1 & +3z_1 = z_1 \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} -5x_1 & -2z_1 = 0 \\ 5x_1 & +y_1 & +2z_1 = 0 \end{cases}$$

On peut donc prendre $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Puis, en notant x_2, y_2, z_2 les coordonnées de v_2 dans la base canonique e de \mathbb{R}^3 , on a par la deuxième équation

$$\begin{cases} -4x_2 & -2z_2 = 2a & +x_2 \\ 5x_2 & +y_2 & +3z_2 = -5a & +z_2 \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} -5x_2 & -2z_2 = 2a \\ 5x_2 & +y_2 & +2z_2 = -5a \end{cases}$$

ie, en sommant les deux équations,

$$\begin{cases} -5x_2 - 2z_2 = 2a \\ y_2 = -3a \end{cases}$$

On peut donc choisir $a = 1$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Enfin, en notant x_3, y_3, z_3 les coordonnées de v_3 dans la base canonique e de \mathbb{R}^3 , on a par la troisième équation,

$$\begin{cases} -4x_3 & -2z_3 = 2b & -2c & -2x_3 \\ 5x_3 & +y_3 & +3z_3 = -5b & +4c & -2z_3 \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} -2x_2 & -2z_2 = 2b - 2c \\ 5x_3 & +y_3 & +5z_3 = -5b + 4c \end{cases}$$

Sauf qu'on sait qu'il existe un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2 , on peut donc prendre $b = c = 0$ pour obtenir

$$\begin{cases} -2x_2 & -2z_2 = 0 \\ 5x_3 & +y_3 & +5z_3 = 0 \end{cases}$$

On peut donc choisir $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $Mat_v(u) = Mat_v(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ □

Exercice. On dit qu'un anneau A est principal si pour tout idéal I de A , il existe $a \in A$ tel que $I = \langle a \rangle$.

Citer deux anneaux principaux.

Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Indication : Considérer l'idéal $\langle 2, X \rangle$.

Démonstration. Les anneaux \mathbb{Z} et $K[X]$ sont principaux.

Puis pour $\mathbb{Z}[X]$, on suppose que $\mathbb{Z}[X]$ est principal et on considère l'idéal $I = \langle 2, X \rangle$.

Alors il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$\langle 2, X \rangle = I = \langle P \rangle$$

En particulier $2 \in I$, donc il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $2 = QP$.

On en déduit que $P \in \{1, -1, 2, -2\}$.

De plus $X \in I$, donc il existe $R \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $X = RP$.

Par conséquent en identifiant le coefficient devant le terme en X , on en déduit que P ne peut pas être égal à 2 ou -2 car R est à coefficients dans \mathbb{Z} .

Donc $P \in \{1, -1\}$ puis $\langle 2, X \rangle = I = \mathbb{Z}[X]$.

En particulier $1 \in \mathbb{Z}[X]$, donc il existe $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $1 = 2U + XV$.

Par conséquent, en évaluant en 0 , on obtient $1 = 2U(0)$ avec $U(0) \in \mathbb{Z}$ ce qui est absurde car 2 ne divise pas 1 dans \mathbb{Z} .

On en déduit donc que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal. □

Exercice. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n .

Démonstration. Le système précédent se réécrit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n, X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

Or $\chi_A = (X - 2)(X - 3)$, donc le polynôme caractéristique χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

De plus $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 3.

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X_0$$

ie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = 5 \times 2^n - 3 \times 3^n \\ v_n = -5 \times 2^n + 6 \times 3^n \end{cases}$$

□