

Question de cours. Soit E un K -espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E . Si u et v sont semblables alors que peut-on dire de leurs polynômes caractéristiques ? Le démontrer.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \simeq \text{End}(\mathbb{C}^n)$ tels que

$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$$

1. On suppose que les vecteurs propres communs à A et B sont dans $\ker(C)$.
2. Montrer que $\ker(C) \neq \{0\}$.
3. Montrer que $\ker(C)$ est stable par A et B .
4. On note A' (respectivement B') l'endomorphisme induit par la restriction de A (respectivement B) à $\ker(C)$. Montrer que A' et B' admettent un vecteur propre commun.
5. Montrer que A, B, C admettent un vecteur propre commun.
6. Montrer que A, B, C sont cotrigonalisables.

Exercice.

1. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n , u un endomorphisme de E et $Q \in K[X]$. On note $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ le spectre de u .
 - (a) Montrer que si u est diagonalisable alors $Q(u)$ est diagonalisable.
 - (b) Montrer que $Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p)\}$
2.
 - (a) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$. Montrer que $\chi_B(A) \neq 0$.
 - (b) Soit $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(M) = AM - MB$$

Montrer que si $M \in \ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors

$$Q(A)M = MQ(B)$$

- (c) En déduire que $\forall C \in M_n(\mathbb{C}), \exists! M \in M_n(\mathbb{C}), AM - MB = C$

Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Énoncer deux caractérisations de la trigonalisabilité d'un endomorphisme.

Exercice. Soit E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

On suppose que u est nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre
2. Montrer que $F = Vect(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est stable par u , puis écrire la matrice de l'endomorphisme induit par la restriction dans la base $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$.

Exercice. Soit E un K -espace vectoriel, f un endomorphisme de E , A et B deux polynômes à coefficients dans K , $D = PGCD(A, B)$ et $M = PPCM(A, B)$.

1. Montrer que $ker(D(f)) = ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.

2. Montrer que $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.

Indication : On pourra utiliser une identité de Bézout $D = AP + BQ$.

3. Montrer que $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.

Indication : En notant $A', B' \in K[X]$ tels que $A = A'D, B = B'D$, on pourra utiliser une identité de Bézout entre A' et B' .

4. Montrer que $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

Exercice. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 &= 2 \\ v_0 &= 1 \end{cases}$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n .

Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E . Que peut-on dire du polynôme caractéristique de $u|_F$? Le démontrer.

Exercice. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable puis, en notant $u = u_A$ l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que dans la base canonique e de \mathbb{R}^3 , $Mat_e(u) = A$, déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 telle que $Mat_v(u)$ soit triangulaire supérieure.

Exercice. On considère E l'ensemble des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Montrer que E est un K -espace vectoriel, déterminer une K -base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$f: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ M \longmapsto MB - BM \end{array}$$

Montrer que f est bien définie, K -linéaire et déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ \dots \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in Sp(A)$ complexe, montrer que $\bar{\lambda} \in Sp(A)$ et que si $v \in E_\lambda(u)$ alors $\bar{v} \in E_{\bar{\lambda}}(u)$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, déterminer une matrice dans $M_n(\mathbb{C})$ diagonale et semblable à A , ainsi qu'une matrice de passage.

Correction en ligne sur <http://perso.eleves.ens-rennes.fr/dcaci409/Kholles.html> ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche