Question de cours. Enoncer le théorème de Bézout. Comment obtenir une telle décomposition en pratique ?

Exercice. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 4v_n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 2 \\ v_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Déterminer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \simeq End(\mathbb{C}^n)$ tels que

$$AB - BA = C, AC = CA, BC = CB$$

1. Montrer que les vecteurs propres communs à A et B sont dans $ker(C)$.
2. Montrer que $ker(C) \neq \{0\}$.
3. Montrer que $ker(C)$ est stable par A et B.
4. On note A' (respectivment B') l'endomorphisme induit par la restriction de A (respectivement B) à $ker(C)$. Montrer que A' et B' admettent un vecteur propre commun.
5. Montrer que A, B, C admettent un vecteur propre commun.
6. Montrer que A, B, C sont cotrigonalisables.

Exercice.

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, u un endomorphisme de E et $Q \in K[X]$. On note $Sp(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ le spectre de u.
   (a) Montrer que si u est diagonalisable alors $Q(u)$ est diagonalisable.
   (b) Montrer que $Sp(Q(u)) = \{Q(\lambda_1), ..., Q(\lambda_p)\}$
2. (a) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tels que $Sp(A) \cap Sp(B) = \varnothing$. Montrer que $\chi_B(A) \neq 0$.
   (b) Soit $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ défini par

   $$\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(M) = AM - MB$$

   Montrer que si $M \in ker(\varphi)$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors

   $$Q(A)M = MQ(B)$$

   (c) En déduire que $\forall C \in M_n(\mathbb{C}), \exists! M \in M_n(\mathbb{C}), AM - MB = C$

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Enoncer deux caractérisations de la trigonalisabilité d'un endomorphisme en termes de polynômes.

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de E.
On suppose que u est nilpotent d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, montrer que la famille $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est libre
2. Montrer que $F = Vect(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est stable par u, puis écrire la matrice de l'endomorphisme induit par la restriction dans la base $(x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$.

Exercice. Soit E un K-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, A et B deux polynômes à coefficients dans K, $D = PGCD(A, B)$ et $M = PPCM(A, B)$.

1. Montrer que $ker(D(f)) = ker(A(f)) \cap ker(B(f))$.
2. Montrer que $Im(D(f)) = Im(A(f)) + Im(B(f))$.
3. Montrer que $ker(M(f)) = ker(A(f)) + ker(B(f))$.
4. Montrer que $Im(M(f)) = Im(A(f)) \cap Im(B(f))$.

Exercice. Soit A un anneau commutatif et $a, b \in A$ tels que l'idéal $(a) + (b)$ soit principal. Montrer que l'idéal $(a) \cap (b)$ est principal.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche

Question de cours. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E. Que peut-on dire du polynôme caractéristique de $u_{|F}$? Le démontrer.

Exercice. On considère E le sous-espace vectoriel des $M \in M_2(K)$ tels que $tr(M) = 0$.

1. Déterminer une K-base de E et en déduire sa dimension.
2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

   Déterminer sa matrice dans la base trouvée à la question précédente.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in E$, calculer $f \circ ... \circ f(A) = f^n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. On dit qu'un anneau A est principal si pour tout idéal I de A, il existe $a \in A$ tel que $I = \langle a \rangle$.
Citer deux anneaux principaux.
Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.
Indication : Considérer l'idéal $\langle 2, X \rangle$.

Exercice. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est trigonalisable et non diagonalisable puis, en notant $u = u_A$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que dans la base canonique e de $\mathbb{R}^3$, $Mat_e(u) = A$, déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_v(u)$ soit triangulaire supérieure.

Correction en ligne sur http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/ dcaci409/Kholles.html ou en tapant "Dorian Cacitti-Holland page personnelle" dans la barre de recherche